

5.5. Asymptotische Freiheit

[D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343 ; H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346 ; Physik-Nobel 2004 ; schon früher G.'t Hooft, aber nicht veröffentlicht !]

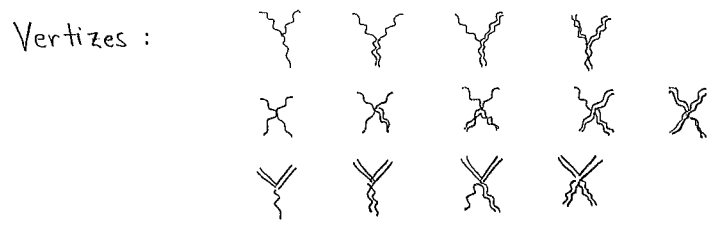
Unser Ziel ist die Berechnung von Z_g , und damit $\mu \frac{d}{d\mu} g_R^2(\mu)$.
Seite 84: es reicht, den quadratischen Teil in $\Gamma[B]$ zu bestimmen.

Seiten 82-83:

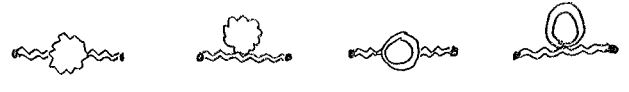
$$e^{\Gamma[B]} = \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp \left\{ - \int dx \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(A+B) F_{\mu\nu}^a(A+B) + \frac{1}{g^2} \mathcal{D}_\mu^{ab}(B) A_\mu^b \mathcal{D}_\nu^{ac}(B) A_\nu^c + \mathcal{D}_\mu^{ca}(B) \bar{c}^a \mathcal{D}_\mu^{cb}(A+B) c^b \right] \right\},$$

mit $F_{\mu\nu}^a(A) = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$
 $\mathcal{D}_\mu^{ab}(A) = \delta_\mu^{ab} + g f^{acb} A_\mu^c$,

Graphisch: $A_\mu^a A_\nu^b \equiv \text{wavy}$ $B_\mu^a \equiv \text{dotted}$ $\bar{c}^a \bar{c}^b \equiv \text{double line}$



1PI-Diagramme, quadratisch in B_μ^a und von der Ordnung g_B^2 :




Propagatoren: (Seite 80)

$$\tilde{A}_\mu^a(p) \tilde{A}_\nu^b(q) = \delta^{ab} \delta(p+q) \left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} + (\xi-1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \right], \quad \tilde{c}^a(p) \tilde{c}^b(q) = \delta^{ab} \delta(p-q) \frac{1}{p^2}$$

Baumniveau (g_B^0):

$$\Gamma^4[B] = - \int_x \frac{1}{2} \partial_\mu B_{B\nu}^a \left[\partial_\mu B_{B\nu}^a - \partial_\nu B_{B\mu}^a \right]$$

$$= - \int_{p,q} \frac{1}{2} \tilde{B}_{B\mu}^a(p) \tilde{B}_{B\nu}^a(q) \delta(p+q) \left[p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu \right]$$

Berechnung von 

Wir brauchen den Vertex 

* aus $\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a (A+B) F_{\mu\nu}^a (A+B)$ [Seite 80]:

$$\int_{P,Q,R} \frac{1}{2} \delta(P+Q+R) \tilde{A}_\mu^a(P) \tilde{B}_\nu^b(Q) \tilde{A}_S^c(R) i g f^{abc} \left[\delta_{\mu S} (P_\nu - R_\nu) + \delta_{S\nu} (R_\mu - Q_\mu) + \delta_{\mu\nu} (Q_S - P_S) \right]$$

* aus $\frac{1}{2\xi} D_\mu^{ab}(B) A_\mu^b D_\mu^{ac}(B) A_\mu^c$ [Seite 85]:

$$\int_{P,Q,R} \frac{1}{2\xi} \left\{ \partial_\mu A_\mu^a g f^{abc} B_\nu^b A_\nu^c + g f^{acb} B_\mu^c A_\mu^b \partial_\mu A_\mu^a \right\} \\ = \int_{P,Q,R} \frac{1}{2} \delta(P+Q+R) \tilde{A}_\mu^a(P) \tilde{B}_\nu^b(Q) \tilde{A}_S^c(R) i g f^{abc} \left[\frac{1}{\xi} P_\mu \delta_{S\nu} - \frac{1}{\xi} R_S \delta_{\mu\nu} \right]$$

Dann: $\exp(-S_I) = 1 - S_I + \frac{1}{2} S_I^2 + \dots$

$$\Rightarrow + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{g^2}{4} \right) \cdot f^{abc} f^{a'b'c'} \int_{PQR} \int_{\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}} \left\langle \begin{array}{l} \delta(P+Q+R) \tilde{A}_\mu^a(P) \tilde{B}_\nu^b(Q) \tilde{A}_S^c(R) \left[\delta_{\mu S} (P_\nu - R_\nu) + \delta_{S\nu} (R_\mu - Q_\mu + \frac{P_\mu}{\xi}) + \delta_{\mu\nu} (Q_S - P_S - \frac{R_S}{\xi}) \right] \\ \delta(\tilde{P}+\tilde{Q}+\tilde{R}) \tilde{A}_{\tilde{\mu}}^{a'}(\tilde{P}) \tilde{B}_{\tilde{\nu}}^{b'}(\tilde{Q}) \tilde{A}_{\tilde{S}}^{c'}(\tilde{R}) \left[\delta_{\tilde{\mu}\tilde{S}} (\tilde{P}_{\tilde{\nu}} - \tilde{R}_{\tilde{\nu}}) + \delta_{\tilde{S}\tilde{\nu}} (\tilde{R}_{\tilde{\mu}} - \tilde{Q}_{\tilde{\mu}} + \frac{\tilde{P}_{\tilde{\mu}}}{\xi}) + \delta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} (\tilde{Q}_{\tilde{S}} - \tilde{P}_{\tilde{S}} - \frac{\tilde{R}_{\tilde{S}}}{\xi}) \right] \end{array} \right\rangle$$

Farben: $f^{abc} f^{a'b'c} = N_c \cdot \delta^{bb'}$

Impulse:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= -P \\ R &= -P - Q \\ \tilde{R} &= -R = P + Q \\ \tilde{Q} &= -\tilde{P} - \tilde{R} = -Q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow + \frac{g^2 N_c}{4} \int_Q \tilde{B}_\nu^b(Q) \tilde{B}_{\tilde{\nu}}^{b'}(-Q) \int_P \left[\frac{\delta_{\mu\tilde{\mu}}}{P^2} + (\xi-1) \frac{P_\mu \tilde{P}_{\tilde{\mu}}}{P^4} \right] \left[\frac{\delta_{SS'}}{(P+Q)^2} + (\xi-1) \frac{(P_S + Q_S)(P_S + Q_S')}{(P+Q)^4} \right] \\ \times \left[\delta_{\mu S} (2P_\nu + Q_\nu) - \delta_{S\nu} (2Q_\mu + (1-\frac{1}{\xi})P_\mu) + \delta_{\mu\nu} \left((1+\frac{1}{\xi})Q_S - (1-\frac{1}{\xi})P_S \right) \right] \\ \times \left[\delta_{\tilde{\mu}\tilde{S}} (2\tilde{P}_{\tilde{\nu}} + Q_{\tilde{\nu}}) - \delta_{\tilde{S}\tilde{\nu}} (2Q_{\tilde{\mu}} + (1-\frac{1}{\xi})P_{\tilde{\mu}}) + \delta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \left((1+\frac{1}{\xi})Q_{\tilde{S}} - (1-\frac{1}{\xi})P_{\tilde{S}} \right) \right]$$

Der Eichparameter ξ ist beliebig, und muss sich am Ende in physikalischen Größen kürzen. Anscheinend ist die Abhängigkeit in einzelnen Diagrammen aber recht nicht-trivial. Darum bietet die Unabhängigkeit eine gute Kontrollmethode an. Auf der anderen Seite können wir aber eine angemessene Wahl treffen, wobei die Berechnung leichter wird.

Im Folgenden: $\xi \equiv 1 \Leftrightarrow$ "Feynman-Eichung".

Für $\xi=1$ und $\delta_{\mu\nu} = d \equiv 4-2\epsilon$:

$$\frac{1}{p^2(p+Q)^2} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\beta\gamma} \left[\delta_{\mu\beta} (2p_\nu + Q_\nu) - 2\delta_{\nu\mu} Q_\beta + 2\delta_{\nu\mu} Q_\beta \right] \left[\delta_{\alpha\gamma} (2p_\nu + Q_\nu) - 2\delta_{\nu\alpha} Q_\beta + 2\delta_{\nu\alpha} Q_\beta \right]$$

$$= \frac{1}{p^2(p+Q)^2} \left\{ d(2p_\nu + Q_\nu)(2p_\nu + Q_\nu) - 2Q_\nu(2p_\nu + Q_\nu) + 2Q_\nu(2p_\nu + Q_\nu) \right.$$

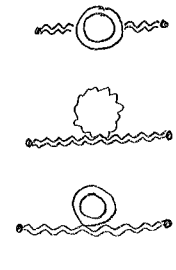
$$\left. - 2Q_\nu(2p_\nu + Q_\nu) + 4\delta_{\nu\mu} Q^2 - 4Q_\nu Q_\nu \right.$$

$$\left. + 2Q_\nu(2p_\nu + Q_\nu) - 4Q_\nu Q_\nu + 4\delta_{\nu\mu} Q^2 \right\}$$

Letztendlich, nach "Exponentenzierung":

$$\Gamma^{AB} = \frac{g^2 N_c}{4} \int_a \tilde{B}_\mu^a(p) \tilde{B}_\nu^a(p+Q) \int_p \frac{1}{p^2(p+Q)^2} \left\{ d(2p_\mu + Q_\mu)(2p_\nu + Q_\nu) + 8\delta_{\mu\nu} Q^2 - 8Q_\mu Q_\nu \right\}$$

Die anderen Diagramme (Übung):

$$\Gamma^{AB} = \frac{g^2 N_c}{4} \int_a \tilde{B}_\mu^a(p) \tilde{B}_\nu^a(p+Q) \int_p \frac{1}{p^2(p+Q)^2} \left\{ \begin{array}{l} -2(2p_\mu + Q_\mu)(2p_\nu + Q_\nu) \\ -2d\delta_{\mu\nu}(p+Q)^2 \\ +4\delta_{\mu\nu}(p+Q)^2 \end{array} \right\}$$


Insgesamt:

$$\Gamma^{AB} = \frac{1}{2} \int_a \tilde{B}_\mu^a(p) \tilde{B}_\nu^a(p+Q) \Pi_{\mu\nu}(Q)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) \equiv \frac{1}{2} g^2 N_c \int_p \frac{1}{p^2(p+Q)^2} \left\{ \begin{array}{l} 4(d-2)p_\mu p_\nu + 2(d-2)(p_\mu Q_\nu + p_\nu Q_\mu) + (d-10)Q_\mu Q_\nu \\ + 8\delta_{\mu\nu} Q^2 + 2(d-d)\delta_{\mu\nu}(p+Q)^2 \end{array} \right\}$$

Aufgabe 9.1: $Q_\mu Q_\nu \Pi_{\mu\nu}(Q) = 0$

$$\Rightarrow \Pi_{\mu\nu}(Q) = \not\!{f}(d, Q^2) \cdot (\delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2}) \cdot \frac{g^2 N_c}{2} \quad \left| \text{kontrahiere mit } \delta_{\mu\nu} \right.$$

$$\Rightarrow \not\!{f}(d, Q^2) = \frac{1}{d-1} \int_p \frac{1}{p^2(p+Q)^2} \left\{ \begin{array}{l} 4(d-2)p^2 + 4(d-2)p \cdot Q + (d-10)Q^2 + 8dQ^2 + 2d(d-d)(p+Q)^2 \end{array} \right\}$$

$$\hookrightarrow p \cdot Q = \frac{1}{2} [(p+Q)^2 - p^2 - Q^2]$$

$$= \frac{1}{d-1} \int_p \frac{1}{p^2(p+Q)^2} \left\{ \begin{array}{l} 2(d-2)p^2 + 2(d-2)(1-d)(p+Q)^2 + (9d-10-2d+4)Q^2 \end{array} \right\}$$

In dimensionaler Regularisierung : $\int_p \frac{1}{(p+Q)^2} = \int_p \frac{1}{p^2} = 0$! [Seite 44]

$$\int_p \frac{1}{p^2(p+Q)^2} = \frac{M^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{M^2}{Q^2} + O(1) \right) \text{ [Aufgabe 9.2]}$$

$$\Rightarrow \not\!{f}(4-2\epsilon, Q^2) = Q^2 \cdot \frac{7d-6}{d-1} \int_p \frac{1}{p^2(p+Q)^2} \Big|_{d=4-2\epsilon} = Q^2 \cdot \frac{M^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \cdot \frac{29}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} + O(1) \right)$$

Nach Addition zum Baumniveau [Seite 85]:

$$\Gamma^A[B] = -\frac{1}{2} \int_Q \tilde{B}_{B\mu}^a(\omega) \tilde{B}_{B\nu}^a(-\omega) [Q^2 \delta_{\mu\nu} - Q_\mu Q_\nu] \left[1 - \frac{g_B^2 \mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \cdot \frac{11N_c}{3} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon} + O(1) \right) \right].$$

Seite 84:

$$* \tilde{B}_B \tilde{B}_B = Z_B \tilde{B}_R \tilde{B}_R \quad \text{und} \quad g_B^2 = g_R^2 \left(1 + \underbrace{[Z_g - 1]}_{O(g_R^2)} \right)$$

* $\Gamma[B]$ ist endlich, sowie $Z_B \cdot Z_g$

$$\Rightarrow Z_B = 1 + \frac{g_R^2 \mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \frac{11N_c}{3} \cdot \frac{1}{\epsilon} + O(g_R^4)$$

$$\Rightarrow Z_g = 1 - \frac{g_R^2 \mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \frac{11N_c}{3} \cdot \frac{1}{\epsilon} + O(g_R^4)$$

Dann folgt die Renormierungsgruppengleichung wie auf Seite 51:

$$g_B^2 = g_R^2 \left[1 - \frac{g_R^2 \mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \frac{11N_c}{3} \cdot \frac{1}{\epsilon} + O(g_R^4) \right] \quad \Big| \mu \frac{d}{d\mu}$$

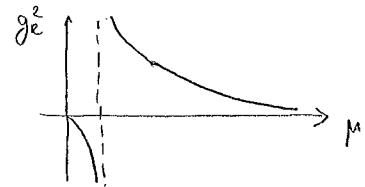
$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} g_R^2 + \frac{g_R^4}{(4\pi)^2} \cdot \frac{22N_c}{3} + O(g_R^6) + O(g_R^4 \epsilon)$$

$$\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\Rightarrow} \mu \frac{d}{d\mu} g_R^2 \equiv \frac{\beta_0}{(4\pi)^2} \cdot g_R^4 + O(g_R^6), \quad \beta_0 = -\frac{22N_c}{3}$$

Wie auf Seite 51 aber mit einem entgegengesetzten Vorzeichen!

Lösung [vgl. Seite 52]:

$$g_R^2(\mu) \approx \frac{(4\pi)^2}{|\beta_0| \ln \frac{\mu}{\mu_0}}$$



Mit N_f Quarks [Übung]: $\beta_0 \rightarrow \frac{-22N_c + 4N_f}{3}$

Welche physikalische Bedeutung hat dieses Ergebnis?

\Rightarrow andere Vorlesungen, z.B. Standard Model.