5.4. Effektive Wirkung und Hintergrundfeldmethode

Seite 40:

$\Gamma[\varphi]$ = generierendes Funktional für 1PI Green-Funktionen

$\equiv$ effektive Wirkung.

Definition:

$$e^{W[J]} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E[\phi] + \int_x \phi(x) J(x)}$$

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int_x \varphi(x) J(x) \quad ; \quad \varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad ; \quad J(x) = -\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)}$$

$$\Rightarrow e^{\Gamma[\varphi]} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E[\phi] + \int_x [\phi(x) - \varphi(x)] J(x)}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E[\phi] - \int_x [\phi(x) - \varphi(x)] \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)}}$$

Substitution von Integrationsvariablen: $\phi \equiv \varphi + \phi'$.

In einem unendlichen Viervolumen können wir weiterhin, ohne Konsequenzen, nur nichtverschwindende Fourier-Impulse in ϕ' behalten, d.h.,

$$\tilde{\phi}'(0) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_x \phi'(x) \equiv 0 \; !$$

Falls jetzt $\varphi(x)$ eine Konstante ist, erhalten wir [R. Jackiw, Phys. Rev. D 9 (1974) 1686]

$$e^{\Gamma[\varphi]} = \int \mathcal{D}\phi' \, e^{-S_E[\varphi + \phi']} \Bigg| \text{Terme linear in } \phi' \text{ wegfallen lassen!}$$

Dieses Ergebnis entspricht formal der Sattelpunktsnäherung und kann, unter Umständen, auch für nicht-konstante φ verallgemeinert werden.

—— o ——

In Eichfeldtheorien bricht die Kopplung $\int_x \phi(x) J(x) \to \int_x A^a_\mu(x) J^a_\mu(x)$ die Eichinvarianz. Das heisst, $\Gamma[\mathcal{A}^a_\mu]$ ist im Allgemeinen weder eichinvariant in $\mathcal{A}^a_\mu \to \mathcal{A}^{a\prime}_\mu$, noch unabhängig von ξ.

Für $J^a_\mu(x) = 0$, d.h. $\delta\Gamma[\mathcal{A}^a_\mu]/\delta\mathcal{A}^a_\mu(x) = 0$, erhalten wir allerdings die Unabhängigkeit zurück: physikalische Observablen werden damit nur „auf der Massenschale" bzw. „für Lösungen der Bewegungsgleichungen", $\delta\Gamma[\mathcal{A}^a_\mu]/\delta\mathcal{A}^a_\mu(x) = 0$, definiert sein.

Die Bestimmung von Γ kann durch die Benutzung von <u>Hintergrundeichung</u> vereinfacht werden [z.B. Abbott, Nucl. Phys. B 185 (1981) 189].

<u>Die Idee</u>: weil $\Gamma[\mathcal{U}^a_\mu]$ eichabhängig ist, können wir für jedes $\mathcal{U}^a_\mu$ eine andere Eichung benutzen, so dass $\Gamma[\mathcal{U}^a_\mu]$ eine angemessene Symmetrie entwickelt, womit seine Bestimmung leichter wird.

<u>Notation:</u>

* Hintergrundfeld $(\mathcal{U}^a_\mu)$ in Hintergrundeichung $\equiv B^a_\mu$.
* Seien $\Phi \equiv \Phi^a T^a$ und $D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu$. Dann ist

$$[D_\mu, \Phi] = \partial_\mu \Phi^a T^a - ig\, [A^a_\mu T^a, \Phi^b T^b]$$
$$= \partial_\mu \Phi^a T^a + g f^{abc} A^a_\mu \Phi^b T^c \qquad \equiv T^a \mathcal{D}^{ab}_\mu(A)\, \Phi^b ,$$

wo $\mathcal{D}^{ab}_\mu(A) = \partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A^c_\mu$ die „kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung" genannt wird.

<u>Die Definition</u>:

(a) vor Verschiebung:

* $S_E[A^a_\mu]$
* $G^a \equiv -\mathcal{D}^{ab}_\mu(B)(A^b_\mu - B^b_\mu)$
* $\delta A^c_\mu / \delta\theta^b = \mathcal{D}^{cb}_\mu(A)$ (Seite 79)

$$\Rightarrow \frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} = -\mathcal{D}^{ac}_\mu(B)\, \mathcal{D}^{cb}_\mu(A)$$

(b) nach Verschiebung:
$\left(\begin{array}{c}\phi \to \varphi + \phi' \\ \Leftrightarrow A \to B + A\end{array}\right)$

* $S_E[A^a_\mu + B^a_\mu]$
* $G^a = -\mathcal{D}^{ab}_\mu(B)\, A^b_\mu$
* $\dfrac{\delta G^a}{\delta \theta^b} = -\mathcal{D}^{ac}_\mu(B)\, \mathcal{D}^{cb}_\mu(A+B)$

$$e^{\Gamma[B]} = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\, e^{\dots}\exp\left\{ - S_E[A^a_\mu + B^a_\mu] - \int_x \left[\frac{1}{2\xi} G^a G^a + \bar{c}^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b}\right) c^b \right] \right\}$$

(Diese Formel könnte eventuell auch als eine Definition betrachtet werden.)

Betrachten wir jetzt die Transformation (vgl. S. 79)

$$B_\mu \to B'_\mu \equiv U B_\mu U^+ - \frac{i}{g}\partial_\mu U U^+ .$$

Wir führen gleichzeitig eine Substitution der Integrationsvariablen durch:

$$\begin{aligned} A_\mu &\to U A_\mu U^+, \\ \bar{c} &\to U \bar{c} U^+, \\ c &\to U c U^+ , \qquad \text{wo} \quad \bar{c} \equiv \bar{c}^a T^a, \quad c \equiv c^a T^a . \end{aligned}$$

Damit wird

$$A_\mu + B_\mu \to U(A_\mu + B_\mu)U^+ - \frac{i}{g}\partial_\mu U U^+ .$$

Zeigen wir, dass <u>$\Gamma[B]$ in dieser Eichtransformation invariant bleibt</u> :

(i) $S_E[A^a_\mu + B^a_\mu]$ ist invariant, weil es sich um eine Eichtransformation handelt.

(ii)
$$\begin{aligned} T^a \mathcal{D}^{ab}_\mu(B') A'^b_\mu &= [D'_\mu, A'_\mu] \\ &= [U D_\mu U^+, U A_\mu U^+] = U[D_\mu, A_\mu]U^+ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} G^{a'} G^{a'} = Sp[T^a G^{a'} T^b G^{b'}] = Sp[G'G'] = Sp[UGU^+UGU^+] = Sp[GG]$$

$\Rightarrow$ Eichterm ist invariant.

(iii) Der Geist-Term kann als

$$\int_x \bar{c}^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b}\right) c^b = \int_x 2\, Sp\{[D_\mu(B), \bar{c}][D_\mu(A+B), c]\}$$

geschrieben werden [Aufgabe 8.1], und ist damit auch invariant.

(iv) Weil $A'^a_\mu A'^a_\mu \overset{(*)}{=} 2\, Sp[A'_\mu A'_\mu] = 2\, Sp[A_\mu A_\mu] = A^a_\mu A^a_\mu$, handelt es sich um eine <u>orthogonale</u> Transformation. Daher ist $\det\left[\delta A'^a_\mu / \delta A^b_\mu\right] = 1$, und das Integrationsmass ist invariant.

Dasselbe gilt für $\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c$.

$$\Longrightarrow \quad \square .$$

(*) Hier <u>keine</u> Summation über μ !

Konsequenzen

Wir haben gelernt (Seite 51), daß die Renormierungsgruppengleichung für die renormierte Kopplungskonstante g_R^2 aus dem „Z-Faktor" Z_g hergeleitet werden kann. Wir zeigen jetzt, daß die Hintergrundeichung eine einfache Methode für die Bestimmung von Z_g anbietet.

(A.) $\quad g_B \equiv Z_g^{\frac{1}{2}} g_R \quad ; \quad B_B \equiv Z_B^{\frac{1}{2}} B_R$

Seite 83 : $\Gamma[B]$ ist eichinvariant, falls mit den nackten Parametern ausgedrückt.

$$\Longrightarrow \quad \Gamma[B] = \int_x \underset{\text{Konstante}}{C} \; Sp\left[F_{\mu\nu,B} F_{\mu\nu,B}\right] + \mathcal{O}(B_B^5)$$

symbolisch

$$\equiv \int_x C \cdot \left[\partial_\mu B_B \partial_\mu B_B + g_B \partial_\mu B_B B_B^2 + g_B^2 B_B^4\right] + \mathcal{O}(B_B^5) \quad \text{(vgl. S.80)}$$

$$= \int_x C \cdot \left[Z_B (\partial_\mu B_R)^2 + Z_B^{\frac{3}{2}} Z_g^{\frac{1}{2}} g_R \partial_\mu B_R B_R^2 + Z_B^2 Z_g g_R^2 B_R^4\right] + \mathcal{O}(B_B^5).$$

(B.) Seite 40 : $\Gamma[B] \sim \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma_B^{(n)} B_B^n \quad ; \quad \Gamma_B^{(n)} \sim A_{B,C}^{(n)}$

Seite 48 : $A_{B,C}^{(n)} \sim Z_B^{-n/2} A_{R,C}^{(n)} \quad ; \quad B_B^n = Z_B^{+n/2} B_R^n$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma[B] \sim \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma_B^{(n)} B_B^n = \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma_R^{(n)} B_R^n$$

$\Longrightarrow$ $\Gamma[B]$ ist endlich, falls mit renormierten Grössen ausgedrückt.

(A.) + (B.) $\Longrightarrow$ $C \cdot Z_B$ ist endlich !

$\Longrightarrow$ $Z_B \cdot Z_g$ ist endlich !

$\Longrightarrow$ die Divergenz in Z_g wird durch Z_B bestimmt.

Z_B kann aber durch den quadratischen Teil in $\Gamma[B]$ berechnet werden. Dies macht die Hintergrundeichung bequem. Im Allgemeinen würde man sowohl den quadratischen als auch den kubischen bzw. biquadratischen Teil brauchen.

[Aufgabe 8.2]

— o —