5.3. Faddeev-Popov-Determinante und Geister

[L.D. Faddeev, V.N. Popov, Phys. Lett. B 25 (1967) 29.]

Unser Pfadintegral für Eichfelder hat momentan die Form

$$\langle \dots \rangle = \int \mathcal{D}A_\mu \; \delta(A_3) \; \det[\partial_3] \; (\dots) \; \exp\left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \; \mathcal{L}_E \right\},$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} ,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Hier sind

$$\delta(A_3) \equiv \text{„Eichbedingung"} \equiv \prod_{\tau,\vec{x}} \delta(A_3(\tau,\vec{x})) ,$$

$$\det[\partial_3] \equiv \text{„Faddeev-Popov-Determinante"} \equiv \det\left[\delta^{(4)}(x-y) \frac{\partial}{\partial x^3} \right] .$$

Unser Ziel ist jetzt, den Teil $\delta(A_3)\det[\partial_3]$ in eine allgemeinere Form umzuschreiben.

Wir definieren wieder $G(x) \equiv A_3(x) \equiv$ Eichfunktion.

In Eichtransformationen (vgl. Seite 73) : $A_3 \to A_3' = A_3 + \partial_3 \Theta$.

Damit ist $\partial_3 \equiv \dfrac{\delta G(x)}{\delta \Theta(y)}$.

Behauptung:

eichinvariante Observablen!

$$\langle \dots \rangle \equiv \int \mathcal{D}A_\mu \; \delta(G) \det\left[\frac{\delta G}{\delta \Theta}\right] (\dots) \exp(-S_E)$$

ist unabhängig von der Wahl der Eichfunktion G!

Beweis:

- S_E und die Observablen sind eichinvariant
  $\Rightarrow$ sie sind unabhängig von G.

- Wir teilen $\int \mathcal{D}A_\mu$ in eine Integration über nicht-äquivalente Konfigurationen, $\int \mathcal{D}\bar{A}_\mu$, sowie deren Eichtransformationen, parametrisiert von Θ, auf. Dann gilt formal:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \; \delta(G) \det\left[\frac{\delta G}{\delta \Theta}\right] = \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu \int \mathcal{D}\Theta \; \delta(G) \det\left[\frac{\delta G}{\delta \Theta}\right] = \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu \int \mathcal{D}G \; \delta(G) = \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu \quad !$$

Das heisst, die Eigenschaften von G kürzen sich, insofern als die Lösung von $G=0$ einen eindeutigen Repräsentanten $\bar{A}_\mu$ des „Eichorbits" liefert. □

Bemerkung: Diese formale Betrachtung nimmt an, daß durch gegebenes G ein eindeutiges $\bar{A}_\mu$ gewählt wird. Gribov [Nucl. Phys. B 139 (1978) 1] hat aber gezeigt, daß dies für nicht-abelsche Theorien im Allgemeinen nicht der Fall ist. Diese Tatsache hat jedoch in der Praxis wenig Bedeutung.

Weitere Schritte:

(1) Weil das Ergebnis unabhängig von G ist, könnten wir auch $\delta(G-f)$ benutzen, mit einer beliebigen Funktion $f(x)$, oder einen Mittelwert über verschiedene $f(x)$ nehmen:

$$\delta(G) \to \int \mathcal{D}f \; \delta(G-f) \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \; \frac{1}{2\xi} f^2\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \; \frac{1}{2\xi} G^2\right).$$

$\xi \geq 0$ ist ein freier „Eichparameter"; Physik muß unabhängig von ξ sein!

(2) Formal (Seite 62): $\det M = \int \mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c \, \exp(-\bar{c}Mc)$, mit Grassmann-Feldern $\bar{c}, c$. Im jetzigen Zusammenhang werden sie (Faddeev-Popov-) Geistfelder genannt.
Notabene: $\delta G/\delta\Theta$ enthält keine Dirac-Matrizen $\Rightarrow$ $\bar{c}, c$ sind „Spin-0"-Felder, obwohl sie fermionisch sind.

$$\Rightarrow \langle \ldots \rangle = \int \mathcal{D}A_\mu \int \mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}c \; (\ldots) \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} G^2 + \bar{c}\left(\frac{\delta G}{\delta \Theta}\right) c\right]\right\}.$$

Verallgemeinerung zum nichtabelschen Fall (insbesondere QCD)

$$\langle \ldots \rangle = \int \mathcal{D}A^a_\mu \int \mathcal{D}\bar{c}^a \mathcal{D}c^a \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \, (\ldots) \exp\left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \bar{\Psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\Psi + \frac{1}{2\xi} G^a G^a + \bar{c}^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} \right) c^b \right] \right\} .$$

Hier :

* $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$ (Seite 72)
* $D_\mu = \partial_\mu - ig T^a A^a_\mu$ (Seite 71)
* In der sogenannten <u>kovarianten Eichung:</u>

$$G^a \equiv - \partial_\mu A^a_\mu$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\xi} G^a G^a = \underline{\underline{\frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^a_\mu \partial_\nu A^a_\nu}}$$

* Seite 71: $A'_\mu = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} \partial_\mu U U^\dagger$, $U \in SU(N_c)$

Seite 73: Parametrisieren wir $U \equiv e^{ig\theta} = e^{igT^a\theta^a}$; $(T^a)^\dagger = T^a$, $Sp[T^a] = 0$.

Infinitesimal:

$$U A_\mu U^\dagger = e^{ig\theta} A_\mu e^{-ig\theta}$$

$$= A_\mu + ig[\theta, A_\mu] + O(\theta^2)$$

$$= T^a \{ A^a_\mu - g f^{abc} \theta^b A^c_\mu \} + O(\theta^2)$$

$$-\frac{i}{g} \partial_\mu U U^\dagger = -\frac{i}{g} ig \partial_\mu \theta + O(\theta^2) = T^a \{ \partial_\mu \theta^a \} + O(\theta^2) .$$

$$\Rightarrow A^{a\prime}_\mu = A^a_\mu + \partial_\mu \theta^a + g f^{abc} A^b_\mu \theta^c + O(\theta^2) .$$

Damit ist

$$\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} = + \overleftarrow{\partial}_\mu \frac{\delta A^a_\mu}{\delta \theta^b} = + \overleftarrow{\partial}_\mu \left[\overrightarrow{\partial}_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A^c_\mu \right]$$

$$\Rightarrow \bar{c}^a \left(\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} \right) c^b = \underline{\underline{\partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + \partial_\mu \bar{c}^a g f^{abc} A^b_\mu c^c}} .$$

Die Wirkung nach Fourier-Transformationen (d.h. „Feynman-Regeln")

(A) Der quadratische Teil:

$$S_E = \int_{P,Q} \delta(P+Q) \left\{ \frac{1}{2} iP_\mu \tilde{A}^a_\nu(P) \left[iQ_\mu \tilde{A}^a_\nu(Q) - iQ_\nu \tilde{A}^a_\mu(Q) \right] + \frac{1}{2\xi} iP_\mu \tilde{A}^a_\mu(P)\, iQ_\nu \tilde{A}^a_\nu(Q) \right\}$$

$$+ \int_{P,Q} \delta(-P+Q) \left\{ \tilde{\bar{\Psi}}_{\alpha A}(P) \left[i\gamma_\mu Q_\mu + m \right]_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{\beta A}(Q) \right\} + \int_{P,Q} \delta(-P+Q) \left\{ -iP_\mu \tilde{\bar{c}}^a(P)\, iQ_\mu \tilde{c}^a(Q) \right\}$$

Dirac ($\alpha = 1,\dots,4$) Farbe ($A = 1,\dots,N_c$)

$$= \int_{P,Q} \delta(P+Q) \frac{1}{2} \tilde{A}^a_\mu(P) \tilde{A}^a_\nu(Q) \left[P^2 \delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) P_\mu P_\nu \right]$$

$$+ \int_{P,Q} \delta(-P+Q)\, \tilde{\bar{\Psi}}_{\alpha A}(P) \left[i\not{P} + m \right]_{\alpha\beta} \tilde{\Psi}_{\beta A}(Q) + \int_{P,Q} \delta(-P+Q)\, \tilde{\bar{c}}^a(P)\, \tilde{c}^a(Q) \cdot P^2$$

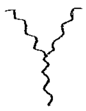
(B) Propagatoren:

$$\underbrace{\tilde{A}^a_\mu(P) \tilde{A}^b_\nu(Q)} = \delta^{ab} \delta(P+Q) \left[\frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{P^2}}{P^2} + \frac{\xi \frac{P_\mu P_\nu}{P^2}}{P^2} \right] \qquad \text{(Aufgabe 7.1)}$$

$$\underbrace{\tilde{c}^a(P) \tilde{\bar{c}}^b(Q)} = \delta^{ab} \delta(P-Q) \frac{1}{P^2} \qquad \text{(Seite 62)}$$

$$\underbrace{\tilde{\Psi}_{\alpha A}(P) \tilde{\bar{\Psi}}_{\beta B}(Q)} = \delta_{AB}\, \delta(P-Q) \frac{\left[-i\not{P} + m \right]_{\alpha\beta}}{P^2 + m^2} \qquad \text{(Seite 63)}$$

(C) Wechselwirkungen bzw. Vertizes



$$\int_X \frac{1}{2} \left[\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu \right] g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Aufgabe 7.2

$$= \int_{P,Q,R} \frac{1}{3!} \delta(P+Q+R)\, \tilde{A}^a_\mu(P) \tilde{A}^b_\nu(Q) \tilde{A}^c_\rho(R) \cdot i g f^{abc} \left[\delta_{\mu\rho}(P_\nu - R_\nu) + \delta_{\rho\nu}(R_\mu - Q_\mu) + \delta_{\nu\mu}(Q_\rho - P_\rho) \right]$$

$$\int_X \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^d_\mu A^e_\nu$$

Aufgabe 7.2

$$= \int_X \frac{1}{4!} A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho A^d_\lambda \cdot g^2 \Big[f^{eab} f^{ecd} (\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}) + f^{eac} f^{ebd} (\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho})$$
$$+ f^{ead} f^{ebc} (\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}) \Big]$$

Quark

$$\int_X \bar{\Psi}_{\alpha A} [\gamma_\mu]_{\alpha\beta} \left[-i g T^a_{AB} \right] A^a_\mu \Psi_{\beta B} = \int_X -ig [\gamma_\mu]_{\alpha\beta} [T^a]_{AB}\, \bar{\Psi}_{\alpha A} A^a_\mu \Psi_{\beta B}$$

Geist

$$\int_X \partial_\mu \bar{c}^a g f^{abc} A^b_\mu c^c = \int_{P,Q,R} \delta(-P+Q+R)\, \tilde{\bar{c}}^a(P) \tilde{A}^b_\mu(Q) \tilde{c}^c(R) \cdot i g f^{abc} \left[-P_\mu \right].$$
