

# 5. Eichfelder

Nach Spin-0 und Spin-1/2 Feldern betrachten wir jetzt Spin-1 Felder, "Vektorfelder". Die Vektorfelder scheinen in der Natur fast immer auch "Eichfelder" zu sein. In Lorentz-Transformationen:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu ; \quad A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') \equiv \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow$$

## 5.1 Eichinvarianz und die klassische Lagrange-Dichte

Einige mögliche quadratische Terme, ohne Eichinvarianz:

$$\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu, \quad \partial^\mu A_\mu \partial^\nu A_\nu, \quad m^2 A^\mu A_\mu$$

Zum Beispiel,

$$\mathcal{L}_M \equiv \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu$$

Scheint in Ordnung zu sein: 4 unabhängige Skalarfelder! Allerdings ist

$$A^\mu A_\mu = A_0 A_0 - \sum_i A_i A_i$$

⇒ 1 bzw. 3 davon geben einen negativen Beitrag zur Hamilton-Dichte. ↗

Warum führen wir jetzt Eichinvarianz ein? Es gibt keine eindeutige Antwort! Die Sache wird um so komischer aussehen, wenn wir die Theorie später quantisieren: die Eichinvarianz wird wieder (wenn auch nur sehr vorsichtig) gebrochen.

Dennoch bringt Eichinvarianz viele gute Dinge mit sich:

- \* Es ist möglich zu beweisen, dass solche Theorien <sup>(perturbativ)</sup> renormierbar sind.
- \* Sie begrenzt die Anzahl möglicher Parameter, so dass solche Theorien recht prädiktiv sind.
- \* Sie begrenzt auch die Anzahl relevanter Observablen: nur eichinvariante Größen werden als physikalisch betrachtet.
- \* Klassische Eichtheorien besitzen elegante differentialgeometrische / topologische Eigenschaften.
- \* Pfadintegralquantisierte Eichfeldtheorie in der Gitter-Regularisierung stellt eine besonders schöne und auch mathematisch rigoros definierte Quantenfeldtheorie dar.
- \* Eichtheorien sind die einzigen bekannten Theorien mit der Eigenschaft der asymptotischen Freiheit.

# Was ist Eichinvarianz?

- \* Materiefelder:  $\phi \in \mathbb{C}^{N_c}$  [Skalarfeld;  $N_c =$  "die Anzahl von Farben"]  
 $\Psi_\alpha \in \mathbb{C}^{N_c}$  [Fermion;  $\alpha = 1, \dots, 4$  numeriert Dirac-Komponente]  
↳ Grassmann-Algebra

\* Wechselwirkungen werden durch Eichfelder vermittelt.

\* Das Eichprinzip verlangt, dass  $\mathcal{L}_M$  invariant in einer lokalen Transformation bleibt,

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi'(x) \equiv U(x)\phi(x) \\ \Psi_\alpha(x) &\rightarrow \Psi'_\alpha(x) \equiv U(x)\Psi_\alpha(x),\end{aligned}$$

wo  $U(x)$  ein Element der Eichgruppe ist. [Yang, Mills 1954]

\* Gruppentheorie:

- endlich dimensionale Darstellungen können als unitäre Darstellungen gesehen werden. kompakter Gruppen
- $A \in U(N_c) \Rightarrow A = e^{i\theta} \cdot B$ ,  $B \in SU(N_c)$ ,  $e^{i\theta} \in U(1)$ .
- betrachten wir also die Eichgruppe  $SU(N_c)$ ; die Eichgruppe  $U(1)$  kann in vieler Hinsicht sogar als deren Grenzfall gesehen werden (vgl. später).

\* Ohne Ableitungen gibt es zwei Arten von invarianten Termen:

(i)  $\phi^\dagger(x)\phi(x) \rightarrow \phi^\dagger(x) \underbrace{U^\dagger(x)U(x)}_1 \phi(x) = \phi^\dagger(x)\phi(x)$

(ii)  $\epsilon_{\alpha\dots\gamma} \phi_\alpha \dots \phi_\gamma \rightarrow \epsilon_{\alpha\dots\gamma} U_{\alpha\alpha'} \dots U_{\gamma\gamma'} \phi_{\alpha'} \dots \phi_{\gamma'} \stackrel{!}{=} \det(U) \cdot \epsilon_{\alpha'\dots\gamma'} \phi_{\alpha'} \dots \phi_{\gamma'}$

↑ antisymmetrisch mit  $N_c$  Indizes

Die zweite Art funktioniert allerdings nicht mit  $U(1)$ !

\* Mit Ableitungen:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \phi(x) &\rightarrow \partial_\mu \{U(x)\phi(x)\} = \{\partial_\mu U(x)\} \phi(x) + U(x) \partial_\mu \phi(x) \\ &= U(x) \{U^\dagger(x) \partial_\mu U(x) \phi(x) + \partial_\mu \phi(x)\}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi$  ist nicht invariant.

Um Invarianz wiederherzustellen, f"uhren wir eine kovariante Ableitung ein:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig A_\mu(x)$$

$g \equiv$  Kopplungskonstante

$$A_\mu(x) \equiv \sum_{a=1}^{N_c-1} A_\mu^a(x) T^a \quad ; \quad A_\mu^a(x) \in \mathbb{R} \quad ; \quad T^a = N_c \times N_c \text{-Matrix} = \text{"Generator" der } SU(N_c)$$

$$(T^a)^\dagger = T^a \quad ; \quad \text{Sp}[T^a] = 0 \quad ; \quad \text{Sp}[T^a T^b] \equiv \frac{\delta^{ab}}{2}$$

Normierung

$$[T^a, T^b] = \sum_c i f^{abc} T^c$$

"Strukturkonstanten" der "Lie-Algebra"

Im Folgenden benutzen wir die Einstein-Konvention auch f"ur die Indizes a,b,c.

Behauptung : Die Transformation

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) \equiv U(x) A_\mu(x) U^\dagger(x) + \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x)$$

f"uhrt zur Eichinvarianz.

Beweis:

(a) Die Transformation ist wohldefiniert:

$$* [A'_\mu]^\dagger = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} \partial_\mu U U^\dagger \quad ; \quad U U^\dagger = 1 \Rightarrow \partial_\mu U U^\dagger + U \partial_\mu U^\dagger = 0$$
$$= A'_\mu$$

$$* \text{Sp}[A'_\mu] = \text{Sp}[U A_\mu U^\dagger] - \frac{i}{g} \text{Sp}[\partial_\mu U U^\dagger] \quad ; \quad * \text{Sp}[U A_\mu U^\dagger] = \text{Sp}[U^\dagger U A_\mu] = 0$$
$$* \text{Sp}[\partial_\mu U U^\dagger] = 0$$

[Aufgabe 5.1]

$$= 0$$

$$(b) D'_\mu \phi' = (\partial_\mu - ig U A_\mu U^\dagger + U \partial_\mu U^\dagger) \{ U \phi \}$$
$$= U (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi + \underbrace{(\partial_\mu U U^\dagger + U \partial_\mu U^\dagger)}_0 \{ U \phi \} = U D_\mu \phi !$$

$$\Leftrightarrow D'_\mu(x) U(x) = U(x) D_\mu(x) \Leftrightarrow \underline{\underline{D'_\mu = U D_\mu U^\dagger}}$$

Damit sind Konstruktionen wie

$$\alpha_M = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi), \quad \text{und}$$
$$\alpha_M = \bar{\Psi}_\alpha \{ i [\gamma^\mu]_{\alpha\beta} D_\mu - m \delta_{\alpha\beta} \} \Psi_\beta$$

tats"achlich eichinvariant!

Letztendlich brauchen wir noch einen "kinetischen Term" für die Eichfelder.

Wir definieren

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] \equiv F_{\mu\nu}^a T^a$$

In Komponentenform:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= 2 \operatorname{Sp} \{ T^a F_{\mu\nu} \} \\ &= \frac{2i}{g} \operatorname{Sp} \left\{ T^a \left( \underbrace{[\partial_\mu, \partial_\nu]}_0 - ig \underbrace{[\partial_\mu, A_\nu]}_{\partial_\mu A_\nu^b T^b} - ig \underbrace{[A_\mu, \partial_\nu]}_{-\partial_\nu A_\mu^b T^b} - g^2 \underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{A_\mu^b A_\nu^c f^{bcd} T^d} \right) \right\} \\ &= \frac{2i}{g} \left\{ -\frac{ig}{2} \partial_\mu A_\nu^a + \frac{ig}{2} \partial_\nu A_\mu^a - \frac{ig^2}{2} A_\mu^b A_\nu^c f^{bca} \right\} \quad ; f^{bca} = f^{abc} \\ &= \underline{\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c} \end{aligned}$$

(Aufgabe 5.1:  $f^{abc}$  sind antisymmetrisch!)

In Eichtransformationen:

$$F'_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D'_\mu, D'_\nu] = \frac{i}{g} [U D_\mu U^\dagger, U D_\nu U^\dagger] = U F_{\mu\nu} U^\dagger$$

$\Rightarrow \operatorname{Sp} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$  ist sowohl eichinvariant als auch Lorentz-invariant.

"Kanonische Normierung" bestimmt (vgl. später) den Koeffizienten.

Damit stehen uns jetzt komplette Theorien zur Verfügung:

- \*  $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \bar{\Psi}_\alpha [i\gamma^\mu D_\mu - m]_{\alpha\beta} \Psi_\beta$  mit  $N_c = 3$  : QCD!
- \*  $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi)$  mit  $N_c = 2$  : Schwache Wechselwirkungen und das Higgs-Boson!

Und mit  $N_c \rightarrow 1, N_c^2 - 1 \rightarrow 1, T^a \rightarrow 1, f^{abc} \rightarrow 0, A_\mu^a \rightarrow A_\mu,$   
 $F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, g \rightarrow e =$  elektromagnetische Kopplungskonstante:

$$* \mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\Psi}_\alpha [i\gamma^\mu D_\mu - m]_{\alpha\beta} \Psi_\beta \quad : \quad \underline{\underline{QED!}}$$