4.4. Diskrete Symmetrien: C, P, T

Was ist eine Symmetrie? Das hängt vom Formalismus ab.

(i) klassische Feldtheorie:

Seite 4; 54 $\Rightarrow$

$$\Delta S_M = \int_\Delta d^4x \, \mathcal{L}_M \quad \text{bleibt invariant in} \quad \begin{cases} \psi(x) \to \psi'(x') \equiv S\psi(x) \\ \bar\psi(x) \to \bar\psi'(x') \equiv \bar\psi(x) S^{-1} \\ x \to x' \, . \end{cases}$$

(ii) nach „kanonischer" Quantisierung:

Es gibt eine Transformation $\hat T$, die unitär $(\langle \hat T\phi | \hat T\chi\rangle = \langle \phi|\chi\rangle)$ bzw. antiunitär $(\langle \hat T\phi | \hat T\chi\rangle = \langle \chi|\phi\rangle)$ ist, und den Hamilton-Operator invariant lässt:

$$:\hat H: = \int d^3\vec x \; : \hat{\bar\psi} \left[-i\gamma^i \partial_i + m \right] \hat\psi : \quad ; \quad \underline{\underline{\hat T :\hat H: \hat T^+ = :\hat H:}}$$

Die Feld-Operatoren sind nicht invariant, aber transformieren „untereinander":

$$\hat T \, \hat\psi(x) \, \hat T^+ \equiv \eta T \, \hat\psi(x') \quad \text{bzw.} \quad \eta T \, \hat\psi^*(x')$$

T: Dirac-Matrix oder $\mathbb{1}_{4\times4}$

η: komplexer Phasenfaktor

Als Operatoren sind $\hat\psi$ und $\hat{\bar\psi} \equiv \hat\psi^+\gamma_0$ nicht unabhängig. Teichenzustände transformieren auch*, $|\vec p, s\rangle \to \hat T|\vec p, s\rangle = |\vec p', s'\rangle$.

* Erwartungswerte bleiben aber invariant:

$\langle \vec q', t' | \hat S | \vec p', s'\rangle$

$= \langle \vec q, t | \underbrace{\hat T^+ \hat T}_{\mathbb{1}} \hat S \underbrace{\hat T^+ \hat T}_{\mathbb{1}} | \vec p, s\rangle$

(iii) nach Pfadintegralquantisierung:

$\int \mathcal{D}\bar\psi \, \mathcal{D}\psi \, \exp(-S_E)$ bleibt invariant nach einer Substitution der Integrationsvariablen:

$$\psi(x) \longrightarrow \eta T \, \psi(x') \quad \text{bzw.} \quad \eta T \, \psi^*(x') \, .$$

Die Felder $\psi(x)$ und $\bar\psi(x)$ sind unabhängige Integrationsvariablen.

Was für Symmetrien gibt es?

(a) kontinuierliche „innere" Symmetrien, z.B.

$$\hat{T}\,\hat{\psi}(x)\,\hat{T}^{+} \equiv e^{i\alpha}\,\hat{\psi}(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{cases} \psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)\,e^{-i\alpha} \end{cases} .$$

Wir kehren später zu diesem Fall zurück.

(b) eigentliche orthochrone Lorentz-Transformationen $L_{+}^{\uparrow}$

Diese wurden schon berücksichtigt.

(c) in Minkowski-Raumzeit [mit kanonischer Quantisierung]:

(i) Raumspiegelung : $\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in L_{-}$.

(ii) Zeitumkehr : $\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in L^{\downarrow}$.

(iii) hermitesche Konjugierung : $\hat{H}^{+} = \hat{H}$.

(iv) Ladungskonjugation : $\hat{C}\,\hat{\psi}(x)\,\hat{C}^{+} = \eta\cdot C\cdot\hat{\bar{\psi}}^{*}(x)$.

Nur drei davon sind unabhängig: wir verlangen (iii), und nehmen (i), (iv) als nicht-triviale Symmetrien. Wie das CPT-Theorem sagt, ist (ii) dann nicht mehr unabhängig, sondern durch (i), (iv) so gegeben, dass CPT eine Symmetrie ist.

(d) in euklidischer Raumzeit [mit Pfadintegralformalismus]:

Die volle Lorentz-Symmetrie ist hier O(4) statt O(3,1). Die entsprechende Mannigfaltigkeit hat nur zwei disjunkte Teile, mit $\det\Lambda = \pm 1$. Das heisst, (i) und (ii) sind nicht mehr unabhängig!

Also bleiben wieder drei nicht-triviale Symmetrien zu verifizieren: (i), (iv), und ein Analogon zu (iii).

Im Folgenden betrachten wir genauer den Fall (d).

$$S_E = \int d\tau\, d^3\vec{x}\ \bar{\Psi}(x)\,[\gamma_\mu \partial_\mu + m]\,\Psi(x)$$

Raumspiegelung bzw. Parität P

$$\partial_i^{\vec{x}}\ \psi(x^0,-\vec{x}) = -\,\partial_i^{-\vec{x}}\ \psi(x^0,-\vec{x})$$

$\Rightarrow$ S_E ist invariant (Notabene: $\int d^3\vec{x} = \int d^3[-\vec{x}]$), falls wir eine Dirac-Matrix P finden, mit der Eigenschaft

$$P^{-1}\gamma_\mu P = \begin{cases} \gamma_\mu\,, & \mu = 0 \\ -\gamma_\mu\,, & \mu \neq 0 \end{cases}\,,$$

und die Substitutionen

$$\psi(x^0,\vec{x}) \longrightarrow \eta_P\, P\, \psi(x^0,-\vec{x})$$
$$\bar{\psi}(x^0,\vec{x}) \longrightarrow \bar{\psi}(x^0,-\vec{x})\,\eta_P^*\, P^{-1}\,,$$

mit $|\eta_P|^2 = 1$, durchführen.

Weil die Matrizen $\tilde{\gamma}_\mu \equiv \{\gamma_0, -\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3\}$ die Algebra $\{\tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ erfüllen, dürfte eine solche „Ähnlichkeitstransformation" immer existieren. Und in der Tat: $P \equiv \gamma_0$ funktioniert!

Ladungskonjugation C

Versuchen wir einen „Umtausch" $\psi \leftrightarrow \bar{\psi}$, oder genauer, mit Komponenten:

$$\psi_\alpha \rightarrow \bar{\psi}_\beta\, C^{-1}_{\beta\alpha}\cdot \eta_c\,,$$
$$\bar{\psi}_\alpha \rightarrow -\,C_{\alpha\beta}\,\psi_\beta\cdot\eta_c^*\,.$$

Falls $|\eta_c|^2 = 1$, erhalten wir damit

$$\mathcal{L}_E \rightarrow -\,C_{\alpha\beta}\psi_\beta\,\big\{[\gamma_\mu]_{\alpha\xi}\,\vec{\partial}_\mu + m\,\delta_{\alpha\xi}\big\}\,\bar{\psi}_\xi\, C^{-1}_{\xi\varsigma}$$

$$= +\,\bar{\psi}_\xi\, C^{-1}_{\xi\varsigma}\,\big\{[\gamma_\mu^T]_{\varsigma\alpha}\,\overleftarrow{\partial}_\mu + m\,\delta_{\varsigma\alpha}\big\}\,C_{\alpha\beta}\,\psi_\beta$$

Nach einer partiellen Integration ist also

$$S_E \rightarrow \int d\tau\, d^3\vec{x}\ \bar{\psi}(x)\,\big\{-C^{-1}\gamma_\mu^T C\,\vec{\partial}_\mu + m\big\}\,\psi(x)\,.$$

Kann man eine Matrix mit der Eigenschaft

$$C^{-1}\gamma_\mu^T C = -\gamma_\mu \quad\Leftrightarrow\quad C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$$

finden? Weil die Matrizen $\hat{\gamma}_\mu \equiv \{-\gamma_\mu^T\}$ die Algebra $\{\hat{\gamma}_\mu, \hat{\gamma}_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ erfüllen, sollte dies wieder der Fall sein. Und in der Tat:

Ein Beispiel wird in der Aufgabe 4.2 gegeben.

Hermitizität

Normalerweise $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, aber was man mit Grassmann-Variablen tut, ist einigermassen eine Definitionsfrage. Das Wesentliche ist, was mit dem Dirac-Operator ($D_M \equiv i\gamma^\mu \partial_\mu - m$; $D_E \equiv \gamma_\mu \partial_\mu + m$) passiert.

Ohne Minuszeichen, in Minkowski-Raumzeit:

$$\left[\hat{\psi}^\dagger \gamma^0 (+i\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - m) \hat{\psi} \right]^\dagger = \hat{\psi}^\dagger (-i\gamma^{\mu\dagger} \overleftarrow{\partial}_\mu - m) \gamma^{0\dagger} \hat{\psi} \quad ; \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \; ; \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \; ; \; \gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}$$

$$\overset{\text{„partielle Integration"}}{=} \hat{\psi}^\dagger \gamma^0 (+i\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - m) \hat{\psi} \, .$$

Also mit dieser Konvention scheint $\hat{H}$ hermitesch zu sein — auf jeden Fall ist D_M ein hermitescher Differentialoperator.

Im euklidischen Fall scheint dasselbe nicht mehr zu funktionieren:

$$* \quad [\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi]^\dagger \overset{?}{=} [\psi^\dagger \gamma_0 (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi]^\dagger = \psi^\dagger (\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) \gamma_0 \psi \quad ; \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$$

$$= \psi^\dagger (-\gamma_\mu \partial_\mu + m) \gamma_0 \psi = \psi^\dagger \gamma_0 (-\gamma_0 \partial_0 + \gamma_i \partial_i + m) \psi \quad ↯$$

$$* \quad (\gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\mu + m)^\dagger \overset{?}{=} \gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m = -\gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\mu + m \quad ↯$$

Aber die Eigenschaft selbst muss immer noch irgendwo verborgen sein!

Angemessene Verfahren:

(a) für den Dirac-Operator: γ_5 – Hermitizität.

$$\gamma_5 (\gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\mu + m)^\dagger \gamma_5 = \gamma_5 (-\gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\mu + m) \gamma_5 = \gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\mu + m \, .$$

(b) für die Wirkung:

Komplexkonjugierung zusammen mit den Substitutionen

$$\psi_\alpha \longrightarrow \bar{\psi}_\beta [\gamma_5]_{\beta\alpha}$$

$$\bar{\psi}_\alpha \longrightarrow - [\gamma_5]_{\alpha\beta} \psi_\beta$$

$$S_E \longrightarrow \int d\tau \, d^3\vec{x} \left\{ - [\gamma_5]_{\alpha\beta} \psi_\beta \left([\gamma_\mu^*]_{\alpha\xi} \overrightarrow{\partial}_\mu + m^* \delta_{\alpha\xi} \right) \bar{\psi}_\xi [\gamma_5]_{\xi\zeta} \right\}$$

$$= \int d\tau \, d^3\vec{x} \left\{ \bar{\psi}_\xi [\gamma_5]_{\xi\zeta} \left([\gamma_\mu^\dagger]_{\zeta\alpha} \overleftarrow{\partial}_\mu + m^* \delta_{\zeta\alpha} \right) [\gamma_5]_{\alpha\beta} \psi_\beta \right\}$$

$$= \int d\tau \, d^3\vec{x} \left\{ \bar{\psi} \gamma_5 (-\gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\mu + m^*) \gamma_5 \psi \right\} = S_E \, , \quad \text{falls } m^* = m \, .$$