4.3. Euklidische Dirac-Felder (in d Dimensionen)

Seiten 57 - 60:

$$Sp\left[e^{-\beta\hat{H}(\hat{p},\hat{x})}\, T\{\hat{x}_H(\tau_1)\ldots\hat{p}_H(\tau_n)\}\right] = \int\limits_{\substack{c(\beta)=-c(0)\\ c^*(\beta)=-c^*(0)}} \mathcal{D}c^*\mathcal{D}c \;\; c(\tau_1)\ldots ic^*(\tau_n)\, e^{-\int_0^\beta d\tau\left\{c^*(\tau)\frac{dc(\tau)}{d\tau} + H(ic^*(\tau),c(\tau))\right\}},$$

wobei

$$\hat{x} \equiv \hat{a} \;\hat{=}\; \hat{\psi}$$
$$\hat{p} \equiv i\hat{a}^+ \;\hat{=}\; \hat{\pi} = i\hat{\psi}^+ \quad ; \qquad \{\hat{x},\hat{p}\} = i \;; \quad \{c,c^*\} = 0 = \{c,c\} = \{c^*,c^*\}.$$

Wir verallgemeinern jetzt dieses Ergebnis zur Quantenfeldtheorie.

Seite 55:

$$\hat{H} = \int d^3\vec{x}\;\hat{\bar{\psi}}\left[-i\gamma^i\partial_i + m\right]\hat{\psi} \quad ; \qquad \hat{\bar{\psi}} = \hat{\psi}^+\gamma^0$$

Wir können also überall $\hat{\psi} \to \psi \equiv c$, $\hat{\psi}^+ \to \psi^+ \equiv c^*$ ersetzen.
Es ist weiterhin Konvention, $\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0$ statt ψ^+ als Integrationsvariable zu nehmen. Damit erhalten wir:

$$Sp\left[e^{-\beta\hat{H}}\, T\{\hat{\psi}_H(x_1)\ldots\hat{\bar{\psi}}_H(x_n)\}\right]$$

$$= \int\limits_{\substack{\psi(\beta,\vec{x}) = -\psi(0,\vec{x})\\ \bar{\psi}(\beta,\vec{x}) = -\bar{\psi}(0,\vec{x})}} \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi \;\; \psi(x_1)\ldots\bar{\psi}(x_n)\, e^{-\int_0^\beta d\tau\int d^3\vec{x}\left\{\bar{\psi}\gamma^0\partial_\tau\psi + \bar{\psi}\left[-i\gamma^i\partial_i + m\right]\psi\right\}}.$$

<u>Zwei Schreibweisen</u>:

(1) Definieren wir die <u>euklidischen Dirac-Matrizen</u> als

$$\gamma_0^E \equiv \gamma^0, \quad \gamma_i^E \equiv -i\gamma^i \qquad \left(\Rightarrow \{\gamma_\mu^E,\gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}\right)$$

wird der Exponent ganz einfach

$$S_E = \int_0^\beta d\tau d^3\vec{x}\; \mathcal{L}_E, \qquad \mathcal{L}_E \equiv \bar{\psi}\left[\gamma_\mu^E\partial_\mu^E + m\right]\psi.$$

(2) Durch Wick-Drehung, $\tau = it$, $\partial_\tau = -i\partial_t$, $d\tau = i\,dt$, erhalten wir auf der anderen Seite (wie schon auf Seite 32 für Skalarfelder)

$$e^{i\int dt\int d^3\vec{x}\;\mathcal{L}_M}, \qquad \mathcal{L}_M = \bar{\psi}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right]\psi.$$

Störungstheorie

Wie für Bosonen, brauchen wir ein Wick-Theorem, um alles durch freie Propagatoren auszudrücken, sowie eben den freien Propagator.

Betrachten wir das Grassmann-Integral

$$I_{k\dots l;m\dots n} \equiv \int \left\{ \prod_i dc_i^* \, dc_i \right\} c_k \cdots c_l c_m^* \cdots c_n^* \; \exp\left\{ - c_p^* A_{pq} c_q \right\} \quad ; \quad A_{pq} \in \mathbb{C} \, .$$

Wir definieren Grassmannsche Ableitungen als:

$$\left\{ \frac{d}{dc_i}, c_j \right\} \equiv \delta_{ij} \quad , \left\{ \frac{d}{dc_i^*}, c_j^* \right\} \equiv \delta_{ij} \qquad ; \left\{ \frac{d}{dc_i}, \frac{d}{dc_j} \right\} = \left\{ \frac{d}{dc_i^*}, \frac{d}{dc_j^*} \right\} = 0 \, .$$

Weiterhin führen wir Grassmannsche Quellen j, j^* ein:

$$Z[j,j^*] \equiv \int \left\{ \prod_i dc_i^* \, dc_i \right\} \exp\left\{ - c_p^* A_{pq} c_q + c_p^* j_p + j_q^* c_q \right\} \, .$$

Dann gilt:

$$I_{k\dots l;m\dots n} = \left(\frac{d}{dj_k^*} \right) \cdots \left(\frac{d}{dj_l^*} \right) \left(\frac{-d}{dj_m} \right) \cdots \left(-\frac{d}{dj_n} \right) Z[j,j^*] \Big|_{j=j^*=0} \, .$$

$Z[j,j^*]$ kann durch eine Substitution der Integrationsvariablen bestimmt werden:

$$c \to c + A^{-1} j$$
$$c^\dagger \to c^\dagger + j^\dagger A^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad -c^\dagger A c + c^\dagger j + j^\dagger c \;\to\; -c^\dagger A c - \cancel{c^\dagger j} - \cancel{j^\dagger c} - j^\dagger A^{-1} j + \cancel{c^\dagger j} + j^\dagger A^{-1} j + \cancel{j^\dagger c} + j^\dagger A^{-1} j$$

$$= -c^\dagger A c + j^\dagger A^{-1} j$$

$$\Rightarrow \quad Z[j,j^*] = Z[0,0] \cdot \exp\left\{ j_p^* A^{-1}_{pq} j_q \right\}$$

Es folgt:

(i) $\langle c_k c_l \rangle = \langle c_k^* c_l^* \rangle = 0$ [Aufgabe 2.2]

$$-\langle c_l^* c_k \rangle = \underline{\underline{\langle c_k c_l^* \rangle}} \equiv \frac{I_{k;l}}{I_;} = \frac{d}{dj_k^*} \frac{-d}{dj_l} e^{j_p^* A^{-1}_{pq} j_q} \Big|_{j=j^*=0} = + \underline{\underline{A^{-1}_{kl}}} \, .$$

(ii) $\langle c_k c_l c_m^* c_n^* \rangle = + c_k c_l c_m^* c_n^* - c_k c_l c_m^* c_n^*$

wobei $c_l c_m^* \equiv \langle c_l c_m^* \rangle$. [Aufgabe 3.1]

Also das alte Wick-Theorem, nur mit $(-1)^m$ dazu!

(iii) Verallgemeinerung von Aufgabe 2.1:

$$\underline{\underline{Z[0,0] = \det A}} \, .$$

Als eine Anwendung bestimmen wir den Schwinger-Propagator für das Dirac-Feld.

Konvention (wie schon auf Seite 33): alle Indizes unten impliziert $\gamma_\mu \equiv \gamma_\mu^E$, $\partial_\mu \equiv \partial_\mu^E$.

Schreiben wir $S_E = \int d\tau \int d^3x\, \mathcal{L}_E$ in Fourier-Darstellung (vgl. Seite 35-36):

$$\psi(x) = \frac{1}{V}\sum_P e^{iP\cdot x}\,\tilde{\psi}(P)$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{V}\cdot\sum_Q e^{-iQ\cdot x}\,\tilde{\bar{\psi}}(Q)$$

$$\Longrightarrow \quad S_E = \frac{1}{V}\sum_P \frac{1}{V}\sum_Q V\,\delta^{(4)}_{P,Q}\,\tilde{\bar{\psi}}(Q)\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\right]\tilde{\psi}(P)$$

$$= \frac{1}{V}\sum_P \tilde{\bar{\psi}}(P)\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\right]\tilde{\psi}(P) \,.$$

Wir erhalten also

$$\left\langle \tilde{\psi}_\alpha(P)\,\tilde{\bar{\psi}}_\beta(Q)\right\rangle = V\delta^{(4)}_{P-Q,0}\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\mathbb{1}\right]^{-1}_{\alpha\beta} \,.$$

Behauptung: $\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\mathbb{1}\right]^{-1} = \dfrac{-i\gamma_\nu P_\nu + m\mathbb{1}}{P^2+m^2}$.

Beweis:

$$\left[-i\gamma_\nu P_\nu + m\right]\left[i\gamma_\mu P_\mu + m\right] = \gamma_\nu\gamma_\mu P_\mu P_\nu + m^2$$

$$= \frac{1}{2}P_\mu P_\nu\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} + m^2 = P_\mu P_\mu + m^2 \qquad \square .$$

Insgesamt, für $V\to\infty$ (vgl. Seiten 35-36):

$$\boxed{\begin{aligned} \left\langle \tilde{\psi}_\alpha(P)\,\tilde{\bar{\psi}}_\beta(Q)\right\rangle &= \delta(P-Q)\,\frac{\left[-i\gamma_\mu P_\mu + m\mathbb{1}\right]_{\alpha\beta}}{P^2+m^2}\,, \\ \left\langle \psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)\right\rangle &= \int\frac{d^dP}{(2\pi)^d}\,e^{iP\cdot(x-y)}\,\frac{\left[-i\gamma_\mu P_\mu + m\mathbb{1}\right]_{\alpha\beta}}{P^2+m^2}\,. \end{aligned}}$$

Es wäre eine schöne Übung zu verifizieren, dass eine direkte Bestimmung von

$$\langle 0|T\{\hat{\psi}_\alpha(x)\,\hat{\bar{\psi}}_\beta(y)\}|0\rangle \,,$$

wie auf Seite 15 für $\langle 0|T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\}|0\rangle$, dasselbe Ergebnis liefert!

Eigenschaften der Dirac-Matrizen in dimensionaler Regularisierung

Minkowski : $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}\,; \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

Euklidisch : $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{1}\,; \quad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu \quad ; \quad \gamma_0 \equiv \gamma_0^E \equiv \gamma^0 \,, \quad \gamma_i \equiv \gamma_i^E \equiv -i\gamma^i$.

Im Folgenden betrachten wir euklidische Dirac-Matrizen.

(1) $\mathrm{Sp}[\mathbb{1}] \equiv N$.

(Normalerweise $N \equiv 4$, manchmal aber $N = 2^{d/2}$ oder vielleicht auch $N = d$).

(2) $\mu \neq \nu \Rightarrow \gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu \quad | \cdot \gamma_\mu \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu] = \mathrm{Sp}[\gamma_\nu] = -\mathrm{Sp}[\gamma_\nu]$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\nu] = 0$.

(3) $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{1}$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu] = N \cdot \delta_{\mu\nu}$.

(4) $\mathrm{Sp}[\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta] = ?$

(a) Zwei Indizes (z.B. α,β) gleich $\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta] = \mathrm{Sp}[\gamma_\delta] = 0$

(b) alle Indizes ungleich $\Rightarrow$

$$\mathrm{Sp}[\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta] = \mathrm{Sp}[\gamma_\varepsilon^2\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta] = -\mathrm{Sp}[\gamma_\varepsilon\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\varepsilon] = -\mathrm{Sp}[\gamma_\varepsilon^2\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta]$$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma] = 0$.

(5) $\mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\lambda] = -\mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma] + 2\delta_{\sigma\lambda}\,\mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu]$

$\hookrightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\sigma] - 2\delta_{\nu\lambda}\,\mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\sigma]$

$\hookrightarrow -\mathrm{Sp}[\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma] + 2\delta_{\mu\lambda}\,\mathrm{Sp}[\gamma_\nu\gamma_\sigma]$

$$\Rightarrow \mathrm{Sp}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\lambda] = N\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\sigma\lambda} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right).$$

(6) Es gibt auch Identitäten ohne Spur, z.B.

$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu = -\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha + 2\delta_{\alpha\nu}\gamma_\mu$

$\hookrightarrow \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\alpha - 2\delta_{\mu\nu}\gamma_\alpha$

$\hookrightarrow -\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu + 2\delta_{\mu\alpha}\gamma_\nu$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu) = \gamma_\mu\delta_{\alpha\nu} + \gamma_\nu\delta_{\alpha\mu} - \delta_{\mu\nu}\gamma_\alpha \, .$$

(7) Es wird auch $\gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ definiert, mit $\gamma_5^2 = 1$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$. $\Rightarrow$ Aufgabe 3.2 .
Aber wie funktioniert γ_5 in d Dimensionen? Es gibt keine eindeutige Antwort! Die 't Hooft-Veltman-Konvention:

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad \mu \leq 3$$
$$[\gamma_5, \gamma_\mu] = 0, \quad \mu > 3 \, .$$