

4.2 Grassmannsche Pfadintegrale

Wie schon mit Bosonen, lohnt es sich reichlich, von der "kanonischen" Quantisierung zum Pfadintegralformalismus überzugehen [Berezin 1966].

Als Anfangspunkt nehmen wir wieder zeitgeordnete Green-Funktionen, nach der Wick-Drehung:

$$G_B^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_n) = \frac{\text{Sp} [e^{-\beta \hat{H}} T \{ \hat{\Psi}_H(x_1) \dots \hat{\Psi}_H(x_n) \hat{\Psi}_H(x_{n+1}) \dots \hat{\Psi}_H(x_n) \}]}{\text{Sp} [e^{-\beta \hat{H}}]}, \quad \beta \geq x_1^0, \dots, x_n^0 \geq 0,$$

$$G_E^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} G_B^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (\text{Seite 29})$$

Die Definition der Zeitordnung für Fermionen:

$$T \{ \hat{\Psi}_H(\tilde{x}) \hat{\Psi}_H(\tilde{y}) \} := \Theta(\tilde{x}^0 - \tilde{y}^0) \hat{\Psi}_H(\tilde{x}) \hat{\Psi}_H(\tilde{y}) - \Theta(\tilde{y}^0 - \tilde{x}^0) \hat{\Psi}_H(\tilde{y}) \hat{\Psi}_H(\tilde{x}).$$

Wie für Bosonen, finden wir die Antwort am leichtesten, indem wir Quantenmechanik statt Quantenfeldtheorie betrachten.

Es ist weiterhin ausreichend, sich auf den "Teilchen-Teil" zu beschränken:

$\hat{\Psi} \sim \int \frac{d^3 \vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} [\hat{a} u e^{-ip \cdot x} + \hat{b}^\dagger v e^{ip \cdot x}]$	$\xrightarrow[\substack{u \rightarrow \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}, \\ E_{\vec{p}} \rightarrow \omega}]{\substack{\text{H-Bild} \rightarrow \text{S-Bild} \\ \text{QFT} \rightarrow \text{QM}}}$	$\hat{x} \equiv \hat{a}$
$\hat{\Psi}^\dagger = i \hat{\Psi}^\dagger \sim \int \frac{d^3 \vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} [i \hat{a}^\dagger u^\dagger e^{ip \cdot x} + i \hat{b} v^\dagger e^{-ip \cdot x}]$	\longrightarrow	$\hat{p} \equiv i \hat{a}^\dagger$
$\hat{H} = \int d^3 \vec{p} E_{\vec{p}} [\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b} \hat{b}^\dagger]$	\longrightarrow	$\hat{H} = \omega (\hat{a}^\dagger \hat{a})$

Antikommutatoren: $\{\hat{a}, \hat{a}\} = \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = 0, \quad \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\} = 1$

$\{\hat{x}, \hat{p}\} = i$

$[\hat{H}, \hat{a}] = \omega (\hat{a}^\dagger \{\hat{a}, \hat{a}\} - \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\} \hat{a}) = -\omega \hat{a}$

$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega (\hat{a}^\dagger \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} - \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} \hat{a}) = +\omega \hat{a}^\dagger$

Das Vakuum $|0\rangle$: $\hat{a}|0\rangle := 0$
 $\hat{a}^\dagger|0\rangle := |1\rangle$

Es gibt keine anderen Zustände:

$\hat{a}^\dagger|1\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger|0\rangle = 0$
 $\hat{a}|1\rangle = \hat{a} \hat{a}^\dagger|0\rangle = |0\rangle$

Es ist offensichtlich, dass wir etwas Exotisches brauchen, um die Minus-Zeichen in Vertauschungen der Fermionen klassisch (ohne Operatoren!) zu beschreiben.
Das relevante mathematische Hilfsmittel: Grassmann-Variablen.

Die Axiome:

- * c, c^* werden als unabhängig voneinander behandelt, wie x, p
- * $\int dc = \int dc^* \equiv 0$.
- * $\int dc c = \int dc^* c^* \equiv 1$.
- * $c^2 = (c^*)^2 = 0$; $cc^* = -c^*c$; $\{c, dc\} = \{c, dc^*\} = \{c^*, dc\} = \{c^*, dc^*\} = 0$.
- * gibt es mehrere Variablen (c_i), antikommutieren sie auch miteinander.
- * Integrationsmaß: $\int dc^* dc$
- * c, c^* müssen auch mit \hat{a}, \hat{a}^\dagger antikommutieren, so dass Produkte wie $c\hat{a}^\dagger$ reguläre bosonische Operatoren sind.

Mit diesen neuen klassischen aber antikommutierenden ($\{c, c^*\} = 0$!) Koordinaten sowie den antikommutierenden Operatoren \hat{a}, \hat{a}^\dagger ($\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1$!) definieren wir zwei nützliche Zustände:

$$|c\rangle \equiv e^{-c\hat{a}^\dagger} |0\rangle = (1 - c\hat{a}^\dagger) |0\rangle = |0\rangle - c|1\rangle ;$$

$$\hat{a}|c\rangle = c|0\rangle = c|c\rangle$$

$$\Rightarrow |c\rangle \text{ ist ein Eigenzustand von } \hat{a} \text{ bzw. } \hat{x}!$$

$$\langle c| \equiv \langle 0| e^{-\hat{a}c^*} = \langle 0| (1 - \hat{a}c^*) = \langle 0| - \langle 1| c^* ;$$

$$\langle c|\hat{a}^\dagger = \langle 0|c^* = \langle c|c^*$$

$$\Rightarrow \langle c| \text{ ist ein Eigenzustand (von rechts) von } \hat{a}^\dagger \text{ bzw. } \hat{p}!$$

$$\langle c'|c\rangle = \langle 0|(1 - \hat{a}c'^*)(1 - c\hat{a}^\dagger)|0\rangle = 1 + \langle 0|\hat{a}c'^*c\hat{a}^\dagger|0\rangle$$

$$= 1 + c'^*c = e^{c'^*c} \tag{3}$$

Wir bemerken jetzt, dass:

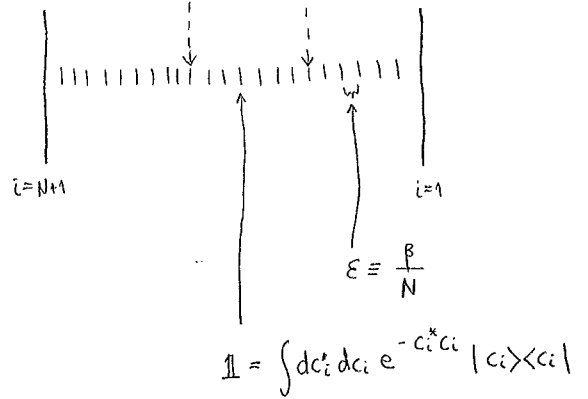
$$\begin{aligned}
 * \int dc^* dc e^{-c^*c} |c\rangle\langle c| &= \int dc^* dc (1-c^*c)(1-c\hat{a}^\dagger) |0\rangle\langle 0| (1-\hat{a}c^*) \\
 &= |0\rangle\langle 0| + \int dc^* dc c\hat{a}^\dagger |0\rangle\langle 0| \hat{a}c^* \\
 &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \mathbb{1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \int dc^* dc e^{-c^*c} \langle -c | \hat{A} | c \rangle &= \int dc^* dc (1-c^*c) \langle 0 | (1+\hat{a}c^*) \hat{A} (1-c\hat{a}^\dagger) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \hat{A} | 0 \rangle - \int dc^* dc \langle 0 | \hat{a}c^* \hat{A} c\hat{a}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \hat{A} | 0 \rangle - \int dc^* dc c^*c \langle 1 | \hat{A} | 1 \rangle \\
 &= \langle 0 | \hat{A} | 0 \rangle + \langle 1 | \hat{A} | 1 \rangle = \text{Sp}[\hat{A}].
 \end{aligned}$$

bosonisch

Mit diesen Schreibweisen können wir dem bosonischen Fall (Seite 30) folgen:

$$\text{Sp} [e^{-\beta\hat{H}} T \{ \hat{x}_H(\tau_1) \dots \hat{p}_H(\tau_n) \}] = \int dc_1^* dc_1 e^{-c_1^*c_1} \langle -c_1 | e^{-(\beta-\tau_1)\hat{H}} \hat{x} \dots \hat{p} e^{-\tau_n\hat{H}} | c_1 \rangle \cdot (-1)^m.$$



Wir schreiben wieder

$$e^{-(\beta-\tau_i)\hat{H}} = [e^{-\epsilon\hat{H}}]^{\frac{\beta-\tau_i}{\epsilon}} = e^{-\epsilon\hat{H}} e^{-\epsilon\hat{H}} \dots e^{-\epsilon\hat{H}} \text{ usw.}$$

Falls \hat{x} auf i sitzt, setzen wir $\mathbb{1}$ auf dessen rechte Seite, so dass $\hat{x}|c_i\rangle = c_i|c_i\rangle$; falls \hat{p} auf die linke Seite, so dass $\langle c_i|\hat{p} = \langle c_i|c_i^*$.

Gebraucht wird also:

$$e^{-c_{i+1}^* c_{i+1}} |c_{i+1}\rangle \langle c_{i+1}| (\hat{p}) e^{-\epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{x})} (\hat{x}) |c_i\rangle$$

↑ je nach dem

$$= e^{-c_{i+1}^* c_{i+1}} |c_{i+1}\rangle \langle c_{i+1}| c_i\rangle (c_{i+1}) e^{-\epsilon H(c_{i+1}, c_i)} (c_i)$$

(3) auf Seite 58

$$= |c_{i+1}\rangle \exp \left[-\epsilon \left\{ c_{i+1}^* \frac{c_{i+1} - c_i}{\epsilon} + H(c_{i+1}, c_i) \right\} \right] (c_{i+1}) (c_i)$$

Und dann dasselbe mit $i \rightarrow i+1$.

Das letzte Intervall verlangt allerdings genauere Betrachtung:

$$\begin{aligned} & \int dc_1^* dc_1 e^{-c_1^* c_1} \langle -c_1 | e^{-\epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{x})} \int dc_N^* dc_N |c_N\rangle \\ &= \int dc_1^* dc_1 dc_N^* dc_N \exp \left[-c_1^* c_1 - c_1^* c_N - \epsilon H(-ic_1^*, c_N) \right] \\ &= \int dc_1^* dc_1 dc_N^* dc_N \exp \left[-\epsilon \left\{ c_1^* \frac{c_1 + c_N}{\epsilon} + H(-ic_1^*, c_N) \right\} \right] \\ &= \int dc_1^* dc_1 dc_N^* dc_N \exp \left[-\epsilon \left\{ -c_1^* \frac{-c_1 - c_N}{\epsilon} + H(-ic_1^*, c_N) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir auch die „Felder“ ausserhalb des Exponenten in ihre ursprüngliche Ordnung, kürzt sich $(-1)^m$, und wir erhalten

$$G_\beta^{(m)}(c_1, \dots, c_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int dc_n^* dc_n \dots dc_1^* dc_1 c(c_1) \dots ic^*(c_n) \exp[-S_E]}{\int dc_n^* dc_n \dots dc_1^* dc_1 \exp[-S_E]}$$

$$S_E = \epsilon \sum_{i=1}^N \left\{ c_{i+1}^* \frac{c_{i+1} - c_i}{\epsilon} + H(ic_{i+1}^*, c_i) \right\} \Bigg|_{\substack{c_{N+1} \equiv -c_1 \\ c_{N+1}^* \equiv -c_1^*}}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{c(\beta) = -c(0) \\ c^*(\beta) = -c^*(0)}} \mathcal{D}c^*(\tau) \mathcal{D}c(\tau) c(c_1) \dots ic^*(c_n) \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \left\{ c^*(\tau) \frac{dc(\tau)}{d\tau} + H(ic^*(\tau), c(\tau)) \right\} \right] \\ &= \int_{\substack{c(\beta) = -c(0) \\ c^*(\beta) = -c^*(0)}} \mathcal{D}c^*(\tau) \mathcal{D}c(\tau) \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \left\{ c^*(\tau) \frac{dc(\tau)}{d\tau} + H(ic^*(\tau), c(\tau)) \right\} \right] \end{aligned}$$