4. Fermionen

4.1 Quantisierung des Dirac-Feldes

Spezielle Relativitätstheorie sagt, dass es keine bevorzugten Koordinatensysteme gibt. Das heisst, die Lagrange-Dichte muss Lorentz-invariant sein. Bislang haben wir dies mit Skalarfeldern erreicht, die in Lorentz-Transformationen invariant sind: $\phi'(x') = \phi(x)$. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten.

Gruppentheorie [z.B. Advanced Concepts of Theoretical Physics]:

Darstellungen der $L_+^\uparrow$ [„eigentliche orthochrone Lorentz-Transformationen"]
$\subset$ Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ [komplexe 2×2-Matrizen mit det = 1]
$\sim$ Darstellungen der $SU(2)\times SU(2)$ [d.h. zwei verschiedene Spins]

Die zwei Spins entsprechen zwei möglichen „Chiralitäten", linkshändig und rechtshändig.

Die einfachste nichttriviale Möglichkeit: ein Spin $\frac{1}{2}$, ein Spin 0

$\Rightarrow$ ein zwei-komponentiger Weyl-Spinor χ,

$$\chi'(x') = M\,\chi(x)\quad,\quad M \in SL(2,\mathbb{C})\,.$$

In der Tat kann man mit solchen Spinoren eine Lorentz-invariante Lagrange-Dichte konstruieren:

* $\bar{\sigma}^\mu \equiv \{ \mathbb{1}_{2\times 2}\,,\ \text{Pauli-Matrizen} \}$

$$\Rightarrow\quad M^+ \bar{\sigma}^\mu M = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu}_{\text{Lorentz-Transformation}} \bar{\sigma}^\nu$$

$$\Rightarrow\quad i\,\chi^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \quad \text{ist invariant.}$$

* dazu ist $\chi^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \chi$ auch invariant,

$$M^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M \overset{!}{=} \det M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und könnte als Massenterm dienen.

Es gibt aber auch Probleme mit einer solchen Theorie:

* chirale Fermionen brechen die Paritätssymmetrie — dies wird in der Natur nur in schwachen Wechselwirkungen beobachtet.
* Massenterm nicht invariant in $\chi \to e^{i\alpha}\chi$ $\Rightarrow$ funktioniert nur für neutrale Teilchen, d.h. Neutrinos.

Im Folgenden betrachten wir lieber die physikalisch „häufigste" Alternative:
Spin $\frac{1}{2}$ + Spin $\frac{1}{2}$ = vier Komponenten = Dirac-Spinor Ψ.

Die Dirac-Gleichung: $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$; γ^μ = Dirac-Matrizen ;
$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ „Clifford-Algebra"

Frage: Gibt es $\mathcal{L}_M$, die diese Gleichung als eine klassische Bewegungsgleichung liefert?

Antwort: Wir führen ein: $\bar\Psi \equiv \Psi^+\gamma^0$; allerdings wird Ψ^+ als unabhängig von Ψ behandelt, wie z und z^* in der Analysis.

Bewegungsgleichung (Seite 2):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \bar\Psi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu \bar\Psi)}\right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathcal{L}_M \equiv \bar\Psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi}} .$$

In Lorentz-Transformationen

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') \equiv S\,\Psi(x)$$
$$\bar\Psi(x) \to \bar\Psi'(x') = \bar\Psi(x)\,S^{-1} \qquad \text{mit} \quad S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu ,$$

und $\mathcal{L}_M$ ist invariant.

Jetzt bewegen wir uns in Richtung Quantisierung des Dirac-Feldes.
Wir haben mit Skalarfeldern gelernt (Seite 9), dass die Zeitentwicklung gleich bleibt wie in der klassischen Theorie, nur die „Normierung" sieht anders aus. Also nehmen wir als Anfangspunkt die bekannten „ebenen Wellen" [Theoretische Übungen]:

$$\hat\Psi = \int \frac{d^3\vec p}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p}}} \sum_{s=\pm1} \left[\hat a^{(s)}_{\vec p}\, u(\vec p,s)\, e^{-ip\cdot x} + \hat b^{+(s)}_{\vec p}\, v(\vec p,s)\, e^{ip\cdot x}\right],$$

$$\hat{\bar\Psi} = \int \frac{d^3\vec p}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p}}} \sum_{s=\pm1} \left[\hat a^{+(s)}_{\vec p}\, \bar u(\vec p,s)\, e^{ip\cdot x} + \hat b^{(s)}_{\vec p}\, \bar v(\vec p,s)\, e^{-ip\cdot x}\right], \qquad p \equiv (E_{\vec p}, \vec p),\ E_{\vec p} \equiv \sqrt{\vec p^2 + m^2} .$$

Hier sind $u, v, \bar u \equiv u^+\gamma^0, \bar v \equiv v^+\gamma^0$ klassische Spinoren, mit u.a. folgenden Eigenschaften [mit unseren Konventionen!]:

* „Bewegungsgleichung": $(\not p - m)\,u(\vec p,s) = (\not p + m)\,v(\vec p,s) = 0$, $\not p \equiv \gamma^\mu p_\mu$.
* „Orthogonalität": $u^+(\vec p,s)\,v(-\vec p,t) = v^+(\vec p,s)\,u(-\vec p,t) = 0$.
* „Normierung": $u^+(\vec p,s)\,u(\vec p,s') = 2E_{\vec p}\,\delta_{ss'}$, $v^+(\vec p,s)\,v(\vec p,s') = 2E_{\vec p}\,\delta_{ss'}$.
* „Vollständigkeitsrelation": $\sum_{s=\pm1} u_\alpha(\vec p,s)\,\bar u_\beta(\vec p,s) = (\not p + m)_{\alpha\beta}$, $\sum_{s=\pm1} v_\alpha(\vec p,s)\,\bar v_\beta(\vec p,s) = (\not p - m)_{\alpha\beta}$.

Bestimmen wir nun den Hamilton-Operator.

Seite 3 : $\mathcal{H} = \pi\, \partial_0 \phi - \mathcal{L}_M$

Im Allgemeinen: $\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \partial_0 \phi_i - \mathcal{L}_M = \bar{\pi}\, \partial_0 \bar{\Psi} + \pi\, \partial_0 \Psi - \mathcal{L}_M$.

Jetzt ist $\pi = \dfrac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_0 \Psi)} = \bar{\Psi}\, i\gamma^0$; $\bar{\pi} = \dfrac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_0 \bar{\Psi})} = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \bar{\Psi}\, i\gamma^0 \partial_0 \Psi - \left\{ \bar{\Psi}\, i\gamma^0 \partial_0 \Psi + \bar{\Psi}\, i\gamma^i \partial_i \Psi - \bar{\Psi} m \Psi \right\}$$

$$= \bar{\Psi} \left[-i\gamma^i \partial_i + m \right] \Psi .$$

Fortan mit Operatoren:

$$\hat{\Psi} = \int_{\vec{q}} \sum_t \left[\hat{a}^{(t)}_{\vec{q}}\, u(\vec{q},t)\, e^{-iq\cdot x} + \hat{b}^{+(t)}_{\vec{q}}\, v(\vec{q},t)\, e^{iq\cdot x} \right]$$

$$\left[-i\gamma^i \partial_i + m \right] \hat{\Psi} = \int_{\vec{q}} \sum_t \left[\hat{a}^{(t)}_{\vec{q}} (-\vec{q}\!\!\!/ + m)\, u(\vec{q},t)\, e^{-iq\cdot x} + \hat{b}^{+(t)}_{\vec{q}} (\vec{q}\!\!\!/ + m)\, v(\vec{q},t)\, e^{iq\cdot x} \right]$$

$(-q\!\!\!/ + m)u = (q\!\!\!/ + m)v = 0$

$$= \int_{\vec{q}} \sum_t \left[\hat{a}^{(t)}_{\vec{q}}\, E_{\vec{q}}\, \gamma_0\, u(\vec{q},t)\, e^{-iq\cdot x} - \hat{b}^{+(t)}_{\vec{q}}\, E_{\vec{q}}\, \gamma_0\, v(\vec{q},t)\, e^{iq\cdot x} \right]$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \int_{\vec{x}} \int_{\vec{p},\vec{q}} \sum_{s,t} \left[\hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}}\, \bar{u}(\vec{p},s)\, e^{ip\cdot x} + \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}\, \bar{v}(\vec{p},s)\, e^{-ip\cdot x} \right] E_{\vec{q}}\, \gamma_0 \left[\hat{a}^{(t)}_{\vec{q}}\, u(\vec{q},t)\, e^{-iq\cdot x} - \hat{b}^{+(t)}_{\vec{q}}\, v(\vec{q},t)\, e^{iq\cdot x} \right]$$

$$= \int_{\vec{x}} \int_{\vec{p}} \int_{\vec{q}} \sum_{s,t} E_{\vec{q}} \left\{ \begin{aligned} & \bar{u}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, u(\vec{q},t)\, \hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}} \hat{a}^{(t)}_{\vec{q}}\, e^{iE_{\vec{p}}x^0 - iE_{\vec{q}}x^0 - i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \\ & - \bar{u}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, v(\vec{q},t)\, \hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}} \hat{b}^{+(t)}_{\vec{q}}\, e^{iE_{\vec{p}}x^0 + iE_{\vec{q}}x^0 - i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} \\ & + \bar{v}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, u(\vec{q},t)\, \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} \hat{a}^{(t)}_{\vec{q}}\, e^{-iE_{\vec{p}}x^0 - iE_{\vec{q}}x^0 + i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} \\ & - \bar{v}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, v(\vec{q},t)\, \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} \hat{b}^{+(t)}_{\vec{q}}\, e^{-iE_{\vec{p}}x^0 + iE_{\vec{q}}x^0 + i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \end{aligned} \right\}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}} \cdot E_{\vec{p}} \sum_{s,t} (2\pi)^3 \left\{ \begin{aligned} & \bar{u}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, u(\vec{p},t)\, \hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}} \hat{a}^{(t)}_{\vec{p}} \\ & - \bar{u}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, v(-\vec{p},t)\, \hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}} \hat{b}^{+(t)}_{-\vec{p}}\, e^{2iE_{\vec{p}}x^0} \\ & + \bar{v}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, u(-\vec{p},t)\, \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} \hat{a}^{(t)}_{-\vec{p}}\, e^{-2iE_{\vec{p}}x^0} \\ & - \bar{v}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, v(\vec{p},t)\, \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} \hat{b}^{+(t)}_{\vec{p}} \end{aligned} \right\}$$

Orthogonalität : $\left\{ \begin{aligned} & \bar{u}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, v(-\vec{p},t) = u^+(\vec{p},s)\, v(-\vec{p},t) = 0 \\ & \bar{v}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, u(-\vec{p},t) = v^+(\vec{p},s)\, u(-\vec{p},t) = 0 \end{aligned} \right.$.

Normierung : $\bar{u}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, u(\vec{p},t) = u^+(\vec{p},s)\, u(\vec{p},t) = 2E_{\vec{p}}\, \delta_{st} = \bar{v}(\vec{p},s)\, \gamma_0\, v(\vec{p},t)$

$$\Rightarrow \hat{H} = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm 1} \left\{ \hat{a}^{+(s)}_{\vec{p}} \hat{a}^{(s)}_{\vec{p}} - \hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} \hat{b}^{+(s)}_{\vec{p}} \right\} .$$

Betrachten wir letztendlich, wie auf Seite 11, $[\hat{H}, \hat{a}_{\vec{k}}]$, $[\hat{H}, \hat{b}_{\vec{k}}]$, $[\hat{H}, \hat{a}^{+}_{\vec{k}}]$, $[\hat{H}, \hat{b}^{+}_{\vec{k}}]$.

Erster Versuch

$[\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+(t)}_{\vec{p}'}] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta_{st}$ usw, wie für Bosonen.

Mit Benutzung von $[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$ erhalten wir:

$$[\hat{H}, \hat{a}^{(s)}_{\vec{k}}] = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \sum_{t=\pm 1} [\hat{a}^{+(t)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{(s)}_{\vec{k}}]\,\hat{a}^{(t)}_{\vec{p}} = -E_{\vec{k}}\,\hat{a}^{(s)}_{\vec{k}}$$

$$[\hat{H}, \hat{b}^{(s)}_{\vec{k}}] = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \sum_{t=\pm 1} -\hat{b}^{(t)}_{\vec{p}}\,[\hat{b}^{+(t)}_{\vec{p}}, \hat{b}^{(s)}_{\vec{k}}] \overset{!}{=} +E_{\vec{k}}\,\hat{b}^{(s)}_{\vec{k}}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^{(s)+}_{\vec{k}}] = \qquad = +E_{\vec{k}}\,\hat{a}^{(s)+}_{\vec{k}}$$

$$[\hat{H}, \hat{b}^{(s)+}_{\vec{k}}] = \qquad \overset{!}{=} -E_{\vec{k}}\,\hat{b}^{(s)+}_{\vec{k}}$$

$\Rightarrow$ Erzeugung von „Antiteilchen" ($b^{+}_{\vec{k}}$) verteilt negative Energie! ⚡

Zweiter Versuch

$\{\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+(t)}_{\vec{p}'}\} = \{\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{b}^{+(t)}_{\vec{p}'}\} = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta_{st}$, $\{\hat{a},\hat{a}\} = \{\hat{b},\hat{b}\} = \{\hat{a}^{+},\hat{a}^{+}\} = \{\hat{b}^{+},\hat{b}^{+}\}$
$= \{\hat{a},\hat{b}\} = \{\hat{a}^{+},\hat{b}^{+}\} = 0$.

Antikommutator!

Mit Benutzung von $[AB, C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B$ erhalten wir:

$$[\hat{H}, \hat{a}^{(s)}_{\vec{k}}] = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \sum_{t=\pm 1} -\{\hat{a}^{+(t)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{(s)}_{\vec{k}}\}\,\hat{a}^{(t)}_{\vec{p}} = -E_{\vec{k}}\,\hat{a}^{(s)}_{\vec{k}}$$

$$[\hat{H}, \hat{b}^{(s)}_{\vec{k}}] = \int d^3\vec{p}\; E_{\vec{p}} \sum_{t=\pm 1} -\hat{b}^{(t)}_{\vec{p}}\,\{\hat{b}^{+(t)}_{\vec{p}}, \hat{b}^{(s)}_{\vec{k}}\} \overset{!}{=} -E_{\vec{k}}\,\hat{b}^{(s)}_{\vec{k}} \qquad \text{usw.}$$

Also mit diesem Trick ist alles in Ordnung.

Fazit: Um positive Energien zu garantieren, müssen wir im fermionischen Fall Antikommutatoren statt Kommutatoren benutzen!

Konsequenzen:

$$\{\hat{\psi}(x^0,\vec{x}), \hat{\psi}(x^0,\vec{y})\} = \{\hat{\psi}^{+}(x^0,\vec{x}), \hat{\psi}^{+}(x^0,\vec{y})\} = 0$$

$\Leftrightarrow$ Kausalität (vgl. Seite 14)

$$\{\hat{\psi}_\alpha(x^0,\vec{x}), \hat{\pi}_\beta(x^0,\vec{y})\} := \{\hat{\psi}_\alpha(x^0,\vec{x}), i\hat{\psi}^{+}_\beta(x^0,\vec{y})\} = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{\alpha\beta}$$

$\Rightarrow$ wie kanonische Quantisierung [Aufgabe 1.2]

— ◦ —