

3.3. Renormierungsgruppe (RG)

Es gibt viele verschiedene Arten von Renormierungsgruppengleichungen, mit unterschiedlichen Anfangspunkten und Zielen. Zum Beispiel:

- * Callan-Symanzik-Gleichungen:

$$m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Big|_{\Lambda_R} \tilde{G}_{R,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \dots$$

Enthält nur endliche renormierte Größen \Rightarrow drückt physikalische Parameterabhängigkeiten aus. Callan-Symanzik-Gleichungen können mit jeder Art von Regularisierung hergeleitet werden.

- * Wilsonsche Renormierungsgruppe:

$$\Lambda_R \frac{\partial}{\partial \Lambda_R} \tilde{G}_{R,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \dots$$

Hier ist Λ_{IR} ein unphysikalischer Infrarotregularisator: Physik entspricht $\Lambda_{IR} \rightarrow 0$, aber Berechnungen könnten mit $\Lambda_{IR} \neq 0$ leichter sein. Sehr wichtig in der Theorie der Phasenübergänge in der statistischen Physik.

- * Renormierungsgruppe für Minimale Subtraktion:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{G}_{R,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \dots$$

Die allgemeine Philosophie:

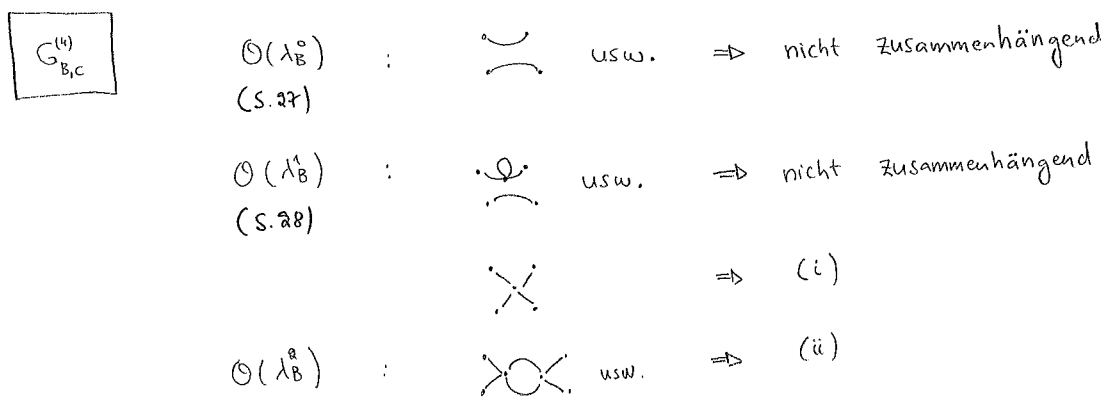
- * Berechnungen könnten in einem bestimmten Teil des Parameterraumes leichter sein als anderswo.
Zum Beispiel, Störungstheorie zur 1-Schleifen-Ordnung gibt schon gute Ergebnisse.
- * Renormierungsgruppengleichungen sind leichter herzuleiten als die kompletten Green-Funktionen.
Zum Beispiel, wir könnten die 2-Schleifen-Ordnung erreichen.
- * Die Renormierungsgruppengleichungen erlauben uns, die guten Ergebnisse in einem Teil des Parameterraumes anderswo hin zu übertragen.

Als ein Beispiel betrachten wir RG-Gleichungen der dritten Art, für λ_R .

[Wir könnten dies auch für m_R^2 , wie auf Seite 47 bestimmt, tun.]

Dafür müssen wir $\tilde{A}_{B,c}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ betrachten. Wir wählen sogar $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$!

Anfangspunkt: Seite 33 + $\exp(-S_I) = 1 - S_I + \frac{1}{2} S_I^2 + \dots$ (oder Seite 28)



$$\begin{aligned}
 (i) \quad \delta(0) \tilde{G}_{B,c}^{(4)}(0,0,0,0) \Big|_{\lambda_B} &= \int_{x_1 x_2 x_3 x_4} \int_W \left(-\frac{\lambda_B}{4!}\right) \langle \underbrace{\phi_B(x_1) \phi_B(x_2) \phi_B(x_3) \phi_B(x_4)}_3 \phi_B^4(w) \rangle \\
 &= -\lambda_B \cdot \int_{x_1 x_2 x_3 x_4} \int_W \int_{p_1 p_2 p_3 p_4} \frac{e^{i p_1 \cdot (x_1 - w)}}{p_1^2 + m_B^2} \cdot \frac{e^{i p_2 \cdot (x_2 - w)}}{p_2^2 + m_B^2} \cdot \frac{e^{i p_3 \cdot (x_3 - w)}}{p_3^2 + m_B^2} \cdot \frac{e^{i p_4 \cdot (x_4 - w)}}{p_4^2 + m_B^2} \\
 &= -\lambda_B \delta(0) \left(\frac{1}{m_B^2}\right)^4 \Rightarrow \tilde{A}_{B,c}^{(4)}(0,0,0,0) \Big|_{\lambda_B} = -\lambda_B.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \delta(0) \tilde{G}_{B,c}^{(4)}(0,0,0,0) \Big|_{\lambda_B} &= \int_{x_1 x_2 x_3 x_4} \int_{w,v} \frac{1}{2} \frac{\lambda_B^2}{(4!)^2} \langle \underbrace{\phi_B(x_1) \phi_B(x_2) \phi_B(x_3) \phi_B(x_4)}_3 \underbrace{\phi_B(w) \phi_B(w) \phi_B(w) \phi_B(w)}_4 \underbrace{\phi_B(v) \phi_B(v) \phi_B(v) \phi_B(v)}_4 \rangle \\
 &= + \frac{3}{2} \cdot \lambda_B^2 \delta(0) \left(\frac{1}{m_B^2}\right)^4 \cdot \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(p^2 + m_B^2)^2} \\
 &\Rightarrow \tilde{A}_{B,c}^{(4)}(0,0,0,0) \Big|_{\lambda_B} = + \frac{3}{2} \lambda_B^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(p^2 + m_B^2)^2}
 \end{aligned}$$

Seite 47:

$$\int \frac{d^{4-2\epsilon} p}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{1}{p^2 + m^2} = - \frac{m^{-2\epsilon} m^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}^2}{m^2} + 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^{4-2\epsilon} p}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} = - \frac{d}{dm^2} \int \frac{d^{4-2\epsilon} p}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{m^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}^2}{m^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right)$$

Erkennt man weiterhin, dass $Z_\phi = 1 + \mathcal{O}(\lambda_R^2)$ [Aufgabe 14.1], erhält man

$$- \tilde{A}_{R,c}^{(4)}(0,0,0,0) = \lambda_R + \lambda_R \delta Z_\lambda - \frac{3}{2} \frac{\lambda_R^2 \mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m_R^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$$

Wir nennen diese Kombination λ_{phys} . Es folgt: $\delta Z_\lambda = \frac{3}{2} \frac{\lambda_R \mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{\epsilon}$

Jetzt leiten wir, auf zwei verschiedene Weisen, eine RG-Gleichung her:

(1)

$$\lambda_B = \lambda_R \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\lambda_R \mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2) \right] \quad \left| \mu \frac{d}{d\mu} \right.$$

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R + \frac{3}{2} \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \underbrace{\mu \frac{d}{d\mu} \frac{\mu^{-2\epsilon}}{\epsilon}}_{-2 \mu^{-2\epsilon}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2 \epsilon} \underbrace{\mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R^2}_{\lambda_R \cdot \mathcal{O}(\lambda_R^2)} + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R = 3 \cdot \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3, \lambda_R^2 \epsilon)$$

(2)

$$\lambda_{phys} = \lambda_R - \frac{3}{2} \frac{\lambda_R^2 \mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu^2}{m_R^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3, \lambda_R^2 \epsilon) \quad \left| \mu \frac{d}{d\mu} \right.$$

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R - 3 \frac{\lambda_R^2 \mu^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3, \lambda_R^2 \epsilon)$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R = 3 \cdot \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3, \lambda_R^2 \epsilon)$$

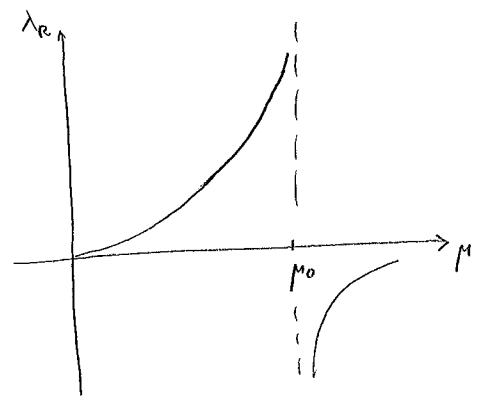
Bemerkungen:

- * Die Herleitung der RG-Gleichungen ist relativ einfach, weil man nur die divergenten Teile der Z-Faktoren zu kennen braucht! [Methode (1)]
- * Die Gleichungen selbst sind endlich, so dass man am Ende $\epsilon \rightarrow 0$ setzen kann, weil es sich um Gleichungen für renormierte Grössen handelt.

Lösung der RG-Gleichung zur Ordnung $O(\lambda_R^2)$

Aufgabe 14.9:

$$\lambda_R(\mu) = \frac{(4\pi)^2}{3} \cdot \frac{1}{\ln \frac{\mu_0}{\mu}}$$



Bedeutung:

- (a) die Lösung ist zuverlässig nur für $\lambda_R \ll 1$, d.h. $\mu \ll \mu_0$.
- (b) es dürfte dennoch richtig sein, dass λ_R mit μ wächst. Wir sagen, dass die Wechselwirkungen stärker werden.
- (c) wir erfahren von Seite 51, dass die Beziehung zwischen λ_{phys} und λ_R nur kleine Korrekturen enthält, falls $\mu^2 \approx m_R^2$! Das heißt, $\lambda_R(\mu) \approx \lambda_{phys}$, falls wir $\mu = m_R$ wählen.
- (d) hätten wir externe Impulse gehabt, sollten wir wahrscheinlich $\mu \sim |P|$ wählen, um $\lambda_R(\mu) \approx \lambda_{phys}$ zu garantieren. Das heißt, das Wachstum von $\lambda_R(\mu)$ mit μ entspricht dem Wachstum von λ_{phys} mit $|P|$.
- (e) physikalische Observablen müssen aber endlich bleiben, auch für $|P| \rightarrow \infty$. Dies heißt, $\mu_0 \rightarrow \infty$. Dies heißt, λ_R mit fixiertem μ bzw. λ_{phys} mit fixierten kleinen $|P| \rightarrow 0$.

„Die Theorie ist trivial, keine Wechselwirkungen“.

