3.2 Nackte und renormierte Green-Funktionen

Fangen wir mit einem Beispiel an: wir betrachten den (euklidischen) Propagator (Seite 41).

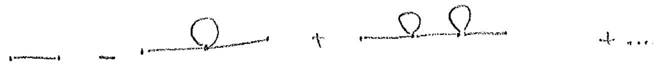
$$\langle \phi(x)\phi(y)\rangle_0 =: \Delta(x-y) \quad , \quad \Delta(x) = \int \frac{d^dP}{(2\pi)^d} \frac{e^{iP\cdot x}}{P^2+m^2} \quad ,$$

$$\langle \tilde{\phi}(P)\tilde{\phi}(Q)\rangle_0 =: \delta(P+Q)\,\tilde{\Delta}(P) \,, \quad \tilde{\Delta}(P) = \frac{1}{P^2+m^2} \quad .$$

Wir schreiben den vollen Propagator jetzt als

$$\langle \tilde{\phi}(P)\tilde{\phi}(Q)\rangle =: \delta(P+Q)\,\frac{1}{\tilde{\Delta}^{-1}(P)+\Pi(P)}$$

$$= \delta(P+Q)\left\{ \tilde{\Delta}(P) - \tilde{\Delta}(P)\Pi(P)\tilde{\Delta}(P) + \tilde{\Delta}(P)\Pi(P)\tilde{\Delta}(P)\Pi(P)\tilde{\Delta}(P) + \ldots \right\} .$$



Seite 41:

$$\Pi(P) = \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^dP}{(2\pi)^d}\frac{1}{P^2+m^2} + O(\lambda^2) \quad .$$

Aufgabe 12.2:

Für $d = 4-2\varepsilon$, $\quad \Pi(P) = \frac{\lambda}{2}\cdot\left[-\frac{m^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+O(1)\right)\right]$.

Das heisst,

$$\langle \tilde{\phi}(P)\tilde{\phi}(Q)\rangle \approx \delta(P+Q)\,\frac{1}{P^2+m^2-\frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}+\ldots} \quad .$$

Wir nennen den Betrag der Polstelle in komplexer P-Ebene die physikalische bzw. die Polmasse:

$$m^2_{Pol} = m^2 - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \ldots$$

Falls also m^2 endlich ist, ist m^2_{Pol} unendlich für $\varepsilon \to 0$ — und umgekehrt!

Eine neue Philosophie:

Die Lagrange-Dichte und ihre Parameter ≡ die „Maschinensprache", d.h. die elementaren Objekte mit denen die Natur operiert. Allerdings sind diese Objekte uns, den „Benutzern" bzw. Beobachtern, normalerweise nicht wichtig. Wir kümmern uns nur um eine einfachere „Hochsprache", d.h. messbare Grössen. (Es gibt aber Freiheit in der Wahl der „Hochsprache"!)

Notation:

Wir bezeichnen die Felder und Parameter der Lagrange-Dichte von jetzt an als „nackte" („bare") Objekte:

$$\phi \to \phi_B$$
$$m^2 \to m_B^2$$
$$\lambda \to \lambda_B$$
$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_B\partial_\mu\phi_B + \frac{1}{2}m_B^2\phi_B^2 + \frac{1}{4!}\lambda_B\phi_B^4 \, .$$

Auf der anderen Seite gibt es messbare Grössen, „renormierte" Objekte. Nachdem wir eine bestimmte Konvention für die letzteren getroffen haben, sollten sie natürlich eine 1-zu-1 Beziehung zu den nackten Objekten besitzen:

$$\phi_B \equiv Z_\phi^{\frac{1}{2}} \cdot \phi_R$$
$$m_B^2 \equiv Z_{m^2} \cdot m_R^2$$
$$\lambda_B \equiv Z_\lambda \cdot \lambda_R$$

In einer freien Theorie gibt es keine Divergenzen

$$\Rightarrow Z_i = 1 + \mathcal{O}(\lambda_R) \, .$$

Wir schreiben häufig

$$Z_i =: 1 + \delta Z_i \, .$$

Renormierbarkeit

Eine Theorie ist renormierbar, falls es eine Wahl der Z_i gibt, so dass alle (unendlich viele!) renormierten Green-Funktionen (mit ϕ_R definiert; Seite 48) bzw. physikalische Grössen endlich bleiben, wenn wir den Limes $\varepsilon \to 0$ nehmen!

(Potenzzählung auf Seite 42: es könnte in unserer Theorie klappen! Beweis: z.B. J.C. Collins, "Renormalization", Cambridge University Press)

Kehren wir zu unserem Beispiel zurück. Jetzt also:

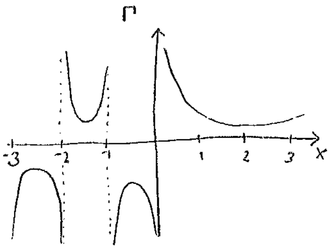
$$\left\langle \tilde{\phi}_B(P)\,\tilde{\phi}_B(Q) \right\rangle = \delta(P+Q)\cdot \frac{1}{P^2+m_B^2 - \frac{\lambda_B}{2}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m_B^2}}$$

$$\Rightarrow\quad m_{Pol}^2 = m_R^2 + \underbrace{\delta Z_{m^2}}_{\mathcal{O}(\lambda_R)}\cdot m_R^2 - \underbrace{\frac{\lambda_R}{2}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m_R^2}}_{\mathcal{O}(\lambda_R)} + \mathcal{O}(\lambda_R^2)\,.$$

Das Integral:

$$\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m_R^2} \overset{\text{Aufgabe 19.2}}{=} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\,\frac{\Gamma(1-d/2)}{(m_R^2)^{1-d/2}}$$

$$\overset{d\equiv 4-2\varepsilon}{=} \frac{m_R^2}{(4\pi)^2}\cdot(4\pi)^{\varepsilon}\,(m_R^2)^{-\varepsilon}\,\Gamma(-1+\varepsilon)$$



$*$ $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad\Rightarrow\quad \Gamma(-1+\varepsilon) = \frac{1}{-1+\varepsilon}\,\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{-1+\varepsilon}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\Gamma(1+\varepsilon)$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon}\cdot\left(1-\gamma_E\,\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)$$

Euler-Gamma $\approx 0.5772156649\ldots$

$*$ Wir schreiben

$$(m_R^2)^{-\varepsilon} \equiv \mu^{-2\varepsilon}\left(\frac{\mu^2}{m_R^2}\right)^{\varepsilon} \overset{a^\varepsilon = e^{\varepsilon\ln a} = 1+\varepsilon\ln a+\mathcal{O}(\varepsilon^2)}{=} \mu^{-2\varepsilon}\left(1+\varepsilon\ln\frac{\mu^2}{m_R^2}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right).$$

Hier ist μ eine künstliche (nichtphysikalische) neue Massenskala, die allerdings später eine wichtige Rolle spielen wird.

$$\Rightarrow\quad m_{Pol}^2 = m_R^2 + \delta Z_{m^2}\cdot m_R^2 + \frac{\lambda_R\mu^{-2\varepsilon}\cdot m_R^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E + \ln\frac{\mu^2}{m_R^2} + \ln 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon)\right)$$

$*$ Mit $\delta Z_{m^2} = -\frac{\lambda_R\mu^{-2\varepsilon}}{32\pi^2}\,\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1)$ wird m_{Pol}^2 endlich!

„Minimale Subtraktion" (MS) : $\delta Z_{m^2} \equiv -\frac{\lambda_R\mu^{-2\varepsilon}}{32\pi^2}\,\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2)$.

$*$ In der Literatur nennt man oft die Kombination $\lambda_R\mu^{-2\varepsilon}$ „λ_R".

$*$ ——— " ———

$$-\gamma_E + \ln\mu^2 + \ln 4\pi = \ln\frac{4\pi\mu^2}{e^{\gamma_E}} =: \ln\bar{\mu}^2\,.$$

Fazit:

$$m_B^2 \xleftrightarrow{\;Z_{m^2}\;} m_R^2 \xleftrightarrow{\;1+\mathcal{O}(\lambda_R)\;} m_{Pol}^2$$

m_B^2	m_R^2	m_{Pol}^2
„nackt", „unendlich" [„Maschinensprache"]	endlich, aber nicht eindeutig; z.B. MS [„Hochsprache"]	endlich und eindeutig (physikalisch) [„Anwendung"]

Renormierte Green-Funktionen

„Natürliche" Definitionen:

$$G^{(n)}_{B,c}(x_1,\dots,x_n) = \langle \phi_B(x_1)\dots\phi_B(x_n)\rangle_c$$

$$G^{(n)}_{R,c}(x_1,\dots,x_n) = \langle \phi_R(x_1)\dots\phi_R(x_n)\rangle_c$$

$$\Rightarrow \quad G^{(n)}_{B,c}(x_1,\dots,x_n) = \underbrace{Z_\phi^{n/2}}_{\text{unabhängig von } x_1,\dots,x_n} G^{(n)}_{R,c}(x_1,\dots,x_n)$$

Die gleiche Beziehung bleibt gültig nach den Fourier-Transformationen.

Insbesondere: (Seite 21)

$$\tilde{A}^{(n)}_{B,c} = \left[\tilde{G}^{(2)}_{B,c}(p_1,-p_1)\right]^{-1} \dots \left[\tilde{G}^{(2)}_{B,c}(p_n,-p_n)\right]^{-1} \tilde{G}^{(n)}_{B,c} = Z_\phi^{-n/2}\,\tilde{A}^{(n)}_{R,c}.$$

Die LSZ-Reduktion (Seite 24) enthält $Z_\phi^{n/2}\,\tilde{A}^{(n)}_{B,c}$,
und produziert damit ein endliches Ergebnis,
wie es für eine physikalische Amplitude sein muss.

— • —