

3. Renormierung

3.1 "Potenzzählung" und Regularisierung

Weil $\chi_E = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$ positiv ist (für $m^2, \lambda > 0$) und schnell wächst für $|\phi| \rightarrow \infty$, scheint das Pfadintegral

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp(-\int d^4x \chi_E)}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-\int d^4x \chi_E)}$$

zu konvergieren. Dies ist aber nicht unbedingt der Fall!

Betrachten wir z.B. $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle_c$ zur ersten Ordnung in λ :

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_c &= \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_0 - \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z) \rangle_{0,c} \\ &= \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_0 - \frac{\lambda}{8} \int d^4z \langle \phi(x) \phi(z) \rangle_0 \langle \phi(y) \phi(z) \rangle_0 \langle \phi(z) \phi(z) \rangle_0 \end{aligned}$$

Seite 36:

* $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle_0 = \int_P e^{iP \cdot (x-y)} \frac{1}{P^2 + m^2}$ Für $x \neq y$ ist dieses Integral endlich. [Aufgabe 13.1]

* $\int d^4z \langle \phi(x) \phi(z) \rangle_0 \langle \phi(y) \phi(z) \rangle_0 = \int d^4z \int_{P,Q} \frac{e^{iP \cdot (x-z)}}{P^2 + m^2} \cdot \frac{e^{iQ \cdot (y-z)}}{Q^2 + m^2}$

$$= \int_{P,Q} \frac{\delta(P+Q) e^{iPx + iQy}}{(P^2 + m^2)(Q^2 + m^2)} = \int_P \frac{e^{iP \cdot (x-y)}}{P (P^2 + m^2)^2}$$

Wieder endlich. $[-\frac{d}{dm^2}(\text{oben})]$

* Aber: $\langle \phi(z) \phi(z) \rangle_0 = \int_P \frac{1}{P^2 + m^2} = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{P^2 + m^2} \propto \int_0^\infty P^3 dP \frac{1}{P^2 + m^2} = \infty!$

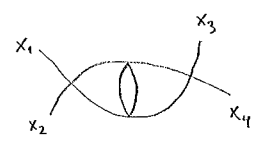
Wir sehen, dass "Schleifenkorrekturen" unendlich sein können!

Die Ursache dafür sind kurze Distanzen ($x=y$)
 \Leftrightarrow große Impulse ($|P| \gg m$)
 \Rightarrow "Ultraviolettphysik"

Es ist möglich, recht allgemein zu analysieren (innerhalb der Störungstheorie!), welche der Schleifenkorrekturen ultraviolett divergent sein können.

Betrachten wir ein Diagramm mit:

- N Eckpunkte bzw. Vertizes
- E externe Beine
- I innere Linien
- S Schleifen



N = 4
 E = 4
 I = 6
 S = 3

Sei d die Raumzeitdimension (=4).

Was passiert für grosse Impulse? Jede innere Linie: $\sim \frac{1}{p^2}$. Jede Schleife: $\sim \int d^d p$.

Das "oberflächliche Divergenzausmass": $D = d \cdot S - 2 \cdot I$.

Es ist zu bemerken, dass:

- * jeder Vertex hat vier Beine;
jede innere Linie ist mit zwei Vertizes verbunden $\Rightarrow 4N = E + 2I$.
- * jede innere Linie hat einen Impuls;
jeder Vertex verlangt Impulserhaltung und kürzt daher einen Impuls;
aber die globale Impulserhaltung muss respektiert werden und nimmt einen der Vertizes für sich. Was noch frei bleibt = Schleifenimpulse!
 $\Rightarrow S = I - N + 1$

Das heisst, $I = 2N - \frac{E}{2}$ und damit $D = d \left(2N - \frac{E}{2} - N + 1 \right) - 2 \left(2N - \frac{E}{2} \right)$
 $= d + (d-4)N + \left(1 - \frac{d}{2}\right)E$.

Wir lernen, dass:

- * für $d < 4$, z.B. $d=3$, wird D kleiner mit N: es gibt Divergenzen nur an niedrigen Schleifenordnungen.
- * für $d=4$, $D = 4 - E$: es gibt Divergenzen nur für $E \leq 4$.
- * um genau zu sein, gilt dieses Prozedere nur für "Subdiagramme", d.h. $\not\equiv 0$ ist divergent, obwohl $E=6$.

Die Idee jetzt: vielleicht können Divergenzen mit $E=2$ in $\frac{1}{2} m^2 \phi^2$ und Divergenzen mit $E=4$ in $\frac{1}{4!} \lambda \phi^4$ "versteckt" werden!?

[$E=1,3$ spielen hier keine Rolle wegen der Symmetrie $\phi \rightarrow -\phi$.]

Um mit der "Versteckung" der Divergenzen systematisch zu sein, müssen wir die Theorie vorübergehend "regularisieren": alles muss endlich sein; wir führen die Integrationen durch; und kehren erst am Ende zu der Frage zurück, ob die Regularisierung ausgestrichen werden kann.

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten für die Regularisierung. Zum Beispiel:

- ① Um den Pfadintegralformalismus herzuleiten, mussten wir sowohl Zeit ($\Delta\tau = \epsilon = \frac{\beta}{N}$) als auch Raum (so dass $\phi(x, \vec{x}_n) \equiv \vec{X}_n(t)$ ein Vektor ist) diskretisieren.

In diesem Fall gibt es eigentlich keine kürzeren Abstände als ϵ bzw. $|\vec{x}_n - \vec{x}_m|$, $n \neq m$, und alles sollte endlich sein!

In der Tat ist eine solche Gitter-Regularisierung wohl die einzige mathematisch völlig rigorose Regularisierungsmethode.

Allerdings sind praktische Berechnungen sehr mühsam, so dass wir diese Regularisierung nicht benutzen werden.

- ② "Impulsabschaltung": statt $\int_{-\infty}^{\infty} d^4p$ jetzt $\int_{|p| \leq \Lambda} d^4p$, und $\Lambda \rightarrow \infty$ erst am Ende. Einfach und im Prinzip in Ordnung; bricht allerdings Symmetrien [z.B. falls $|p| \leq \Lambda$, $|q| \leq \Lambda$, was ist zu tun mit $|p+q|$?], was besonders in Eichfeldtheorien problematisch wird.

- ③ Pauli-Villars-Regularisierung; "Proper time"-Regularisierung von Schwinger; ...

- ④ Sehr schöne Zauberei: Dimensionale Regularisierung

['t Hooft 1979, und auch andere]

Dimensionale Regularisierung

Betrachten wir die Raumzeit-Dimension d als eine komplexe Zahl; am Ende dann die analytische Fortsetzung $d \rightarrow 4$!

Divergenzen tauchen als Pole $\sim \frac{1}{d-4}$ auf!

$$\int_P = \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \rightarrow \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d}$$

$$\int d^d x \rightarrow \int d^d x$$

$$\delta(P) \rightarrow (2\pi)^d \delta^{(d)}(P)$$

$$\int d^d x e^{iP \cdot x} = \delta(P)$$

Die "Axiome":

- (i) $\int d^d P F(P+Q) = \int d^d P F(P)$
- (ii) $\int d^d P F(\lambda P) = |\lambda|^{-d} \int d^d P F(P)$
- (iii) $\int d^d P d^d Q F(P)G(Q) = \int d^d P F(P) \int d^d Q G(Q)$

Eine wichtige Konsequenz:

Betrachten wir $\int d^d P e^{-tP^2} \stackrel{(iii)}{=} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dP_1 e^{-tP_1^2} \right]^d = \left(\frac{\pi}{t} \right)^{d/2}$

Auf der anderen Seite,

$$\int d^d P F(|P|) = c(d) \int_0^{\infty} dP P^{d-1} F(P)$$

$$\Rightarrow \int d^d P e^{-tP^2} = c(d) \int_0^{\infty} dP P^{d-1} e^{-tP^2} = \frac{c(d)}{t^{d/2}} \int_0^{\infty} dx x^{d-1} e^{-x^2}$$

$$\frac{c(d)}{2t^{d/2}} \int_0^{\infty} dy y^{\frac{1}{2}} y^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} e^{-y} = \frac{c(d)}{2t^{d/2}} \int_0^{\infty} dy y^{\frac{d}{2}-1} e^{-y} = \frac{c(d)}{2t^{d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$$

$\Rightarrow c(d) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$

Zum Nachprüfen: $c(2) = 2\pi$
 $c(3) = 4\pi$

"Lustige" Konsequenzen:

$\int d^d P = \int \frac{d^d P}{P^2} = \int \frac{d^d P}{(P^2)^m} = 0$, wegen (ii)!

Nur Integrale mit einer Massenskala bzw. Impulsskala bzw. $\exp(iP \cdot x)$ sind nicht-verschwindend. Aber es funktioniert!