2.3 Schwinger-Dyson-Gleichungen und generierende Funktionale

Als eine Anwendung des Pfadintegralformalismus leiten wir jetzt einige Gleichungen her, die auch ausserhalb der Störungstheorie gültig sind.

Ein <u>Funktional</u> hängt von den Werten einer Funktion überall in Raum und Zeit ab:

$$S_E[\phi(x)] = \int d^4x\, \mathcal{L}_E(\phi(x)) \,.$$

Funktional → S_E Funktion → $\mathcal{L}_E(\phi(x))$

Eine <u>Funktionalableitung</u> wird definiert als:

$$\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta\phi(y)} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F[\phi(x)+\varepsilon\,\delta(x-y)] - F[\phi(x)]}{\varepsilon} \,.$$

Zum Beispiel:

$$\frac{\delta S_E[\phi(x)]}{\delta\phi(y)} = \int d^4x\, \frac{\partial \mathcal{L}_E(\phi(x))}{\partial\phi(x)} \cdot \delta^{(4)}(x-y) = \frac{\partial \mathcal{L}_E(\phi(y))}{\partial\phi(y)} \,.$$

<u>Schwinger-Dyson-Gleichungen</u> drücken die trivialen Tatsachen

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v}\, \frac{d}{dv_k}\, e^{-S(\vec{v})} = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{v}\, \frac{d}{dv_k} \left\{ v_i v_j \ldots e^{-S(\vec{v})} \right\} \overset{\checkmark}{=} 0$$

für $\lim_{|\vec{v}|\to\infty} S(\vec{v}) = \infty$

im Falle der Pfadintegrale aus:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \left\{ e^{-S_E[\phi]} \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi\, \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \left\{ \phi(y)\phi(z)\ldots e^{-S_E[\phi]} \right\} .$$

<u>Zum Beispiel:</u>

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4$$

Aufgabe 11.1

$$\Rightarrow \frac{\delta S_E}{\delta\phi(x)} = \left[-\partial_\mu^2 + m^2\right]\phi(x) + \frac{1}{3!}\lambda\,\phi^3(x)$$

$$\Rightarrow 0 = \int \mathcal{D}\phi \left\{ \left[-\partial_\mu^2 + m^2\right]\phi(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi^3(x) \right\} e^{-S_E[\phi]}$$

$$\Rightarrow 0 = \left[-\partial_\mu^2 + m^2\right]\langle\phi(x)\rangle + \frac{\lambda}{3!}\langle\phi^3(x)\rangle \,.$$

Wir finden also die quantenfeldtheoretische Verallgemeinerung der klassischen Bewegungsgleichung!

Die Schwinger-Dyson-Gleichungen sind besonders wertvoll in Zusammenhang mit generierenden Funktionalen.

wie der Quellenvektor auf Seite 34

Sei $Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E[\phi] + \int d^4x \, J(x)\phi(x)}$.

Dann ist $$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} = \int \mathcal{D}\phi \, \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\, e^{-S_E[\phi] + \int d^4x \, J(x)\phi(x)} .$$

Das heisst,
$$G_E^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle = \frac{\left.\dfrac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)}\right|_{J=0}}{Z[0]} .$$

Wir „normieren" meistens $Z[0] = 1$.

Dann handelt es sich hier im Wesentlichen um eine Taylor-Entwicklung:
$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} J(x_1) \cdots J(x_n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \; G_E^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\, J(x_1) \cdots J(x_n) .$$

Das heisst, $Z[J]$ „generiert" alle Green-Funktionen.

Betrachten wir folglich die Schwinger-Dyson-Gleichung für $Z[J]$:
$$0 = \int \mathcal{D}\phi \, \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \left\{ e^{-S_E[\phi] + \int d^4y \, J(y)\phi(y)} \right\}$$
$$= \int \mathcal{D}\phi \left\{ -\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \phi(x)} + J(x) \right\} e^{-S_E[\phi] + \int d^4y \, J(y)\phi(y)} .$$

Auf der anderen Seite ist
$$\int \mathcal{D}\phi \, [\phi(x)]^n \, e^{-S_E[\phi] + \int d^4y \, J(y)\phi(y)} = \int \mathcal{D}\phi \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]^n e^{-S_E[\phi] + \int d^4y \, J(y)\phi(y)} .$$

Wir schreiben $\dfrac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \phi(x)} \equiv \mathcal{L}_E'(\phi(x))$, und erhalten damit

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \, \underbrace{\left\{ -\mathcal{L}_E'\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + J(x) \right\}}_{\text{unabhängig von } \phi\,!} e^{-S_E[\phi] + \int d^4y \, J(y)\phi(y)}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \left[-\mathcal{L}_E'\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + J(x) \right] Z[J] .$$

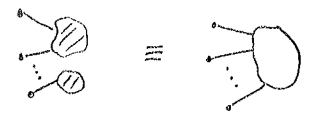
Was bedeutet dies? Betrachten wir ein Beispiel.

$$\mathcal{L}_E \equiv \frac{1}{2}\phi\,\Delta^{-1}\phi + \frac{1}{3!}g\phi^3 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \quad ; \quad \Delta^{-1} \equiv -\partial_\mu^2 + m^2$$

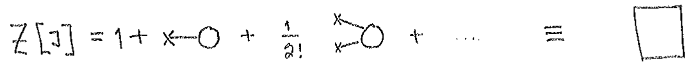
nach partieller Integration

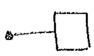
$$\mathcal{L}_E' = \Delta^{-1}\phi + \frac{g}{2!}\phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 \qquad \text{[Aufgabe 11.1]}$$

Notation:

$G^{(n)} \equiv$ 

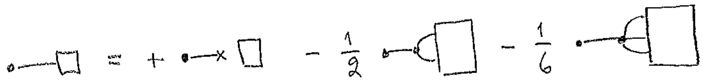
$J(x) \equiv \times$



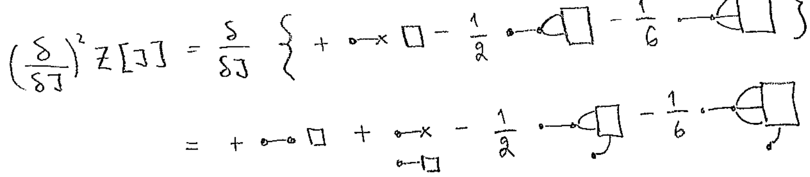
$\dfrac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \equiv$ 

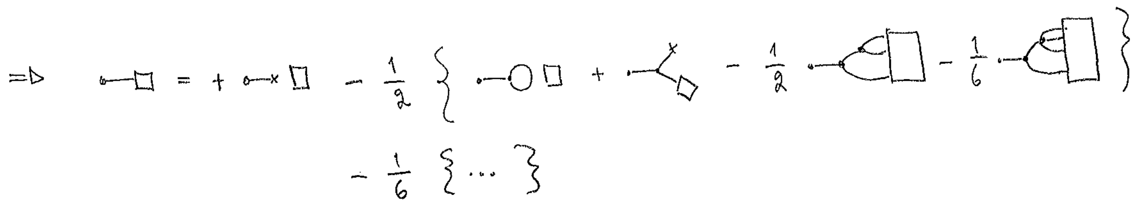
Jetzt also:

$$\Delta^{-1}\frac{\delta}{\delta J}Z[J] = \left[+J - \frac{g}{2}\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^2 - \frac{\lambda}{6}\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^3\right]Z[J] \qquad \Big| \times \ \Delta \text{ von links}$$

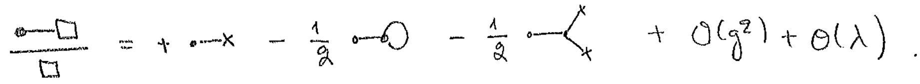


Danach können wir „iterieren":





Falls wir am Ende zur Störungstheorie zurückkehren wollen, können wir die Iteration abbrechen. Zum Beispiel, zur Ordnung $\mathcal{O}(g^1), \mathcal{O}(\lambda^0)$:



Es ist möglich, auch andere generierende Funktionale zu definieren.

(A) $Z[J] \equiv \exp\{W[J]\}$

Eigenschaften von $W[J]$:

* Schreibt man $W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, G^{(n)}_{E,c}(x_1, \dots, x_n) \, J(x_1) \dots J(x_n)$
  generiert man die zusammenhängenden Green-Funktionen. [ohne Beweis]
* Schwinger-Dyson-Gleichung für $W[J]$:
  $$\mathcal{L}_E' \left(\delta W[J]/\delta J(x) + \delta/\delta J(x) \right) = J(x) \qquad \text{[Aufgabe 11.2]}$$

(B) Durch Legendre-Transformation:

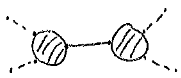
$$\varphi(x) \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad , \qquad \Gamma[\varphi] \equiv W[J] - \int d^4x \, \varphi(x) J(x) \; .$$

Eigenschaften von $\Gamma[\varphi]$:

* $$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \int \underbrace{\frac{\delta W}{\delta J}}_{\varphi} \frac{\delta J}{\delta \varphi} - J - \int \varphi \frac{\delta J}{\delta \varphi} = -J(x)$$
  Am Ende setzen wir $J(x) \to 0 \Rightarrow \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi} = 0$
  $\Rightarrow$ „der Grundzustand ist ein Extremum von $\Gamma[\varphi]$" !

* Schwinger-Dyson-Gleichung für $\Gamma[\varphi]$: Aufgabe 11.2.
* Schreibt man $\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, \Gamma^{(n)}_E(x_1, \dots x_n) \, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$,
  generiert man die 1-Teilchen-nicht-reduzierbaren (1PI) Green-Funktionen.
  [ohne Beweis]

zusammenhängend: $G^{(n)}_{E,c}$ = 

amputiert: $A^{(n)}_{E,c}$ =  aber  ist möglich

1PI: $\Gamma^{(n)}_E$ =  $\Rightarrow$ keine „einsamen" Linien bzw. Teilchen!