2.2 Das Wick-Theorem und der Schwinger-Propagator

Als ein erster Schritt sollten wir verifizieren, dass der Pfadintegralformalismus den Feynman-Propagator und die störungstheoretischen Regeln, die wir schon kennengelernt haben, wiedergibt.

Alles wird viel einfacher (und besser definiert!) sein, falls wir immer mit den Wickgedrehten Grössen arbeiten. Anstelle des Feynman-Propagators sollten wir also den Schwinger-Propagator (Seite 13) finden.

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \sum_i \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 - V(\phi) \qquad ; \; i = 1,2,3$$

$$\mathcal{L}_E \equiv -\mathcal{L}_M(t = -i\tau) \qquad [\text{Seite } 32]$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{1}{2}\sum_i(\partial_i\phi)^2 + V(\phi)$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + V(\phi)$$

Konvention: $(\partial_\mu\phi)^2 = \partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi$ impliziert euklidische Metrik, sowie Einstein-Konvention.

$$S_E \equiv \int d\tau \int d^3\vec{x}\; \mathcal{L}_E$$

Die Integration war früher von 0 nach β, aber dies kann nach Bedarf verallgemeinert werden, und wird daher hier nicht spezifiziert.

Seite 31:

$$G_\beta^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \equiv \frac{\int \mathcal{D}\phi\; \phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\, e^{-S_E}}{\int\mathcal{D}\phi\, e^{-S_E}} =: \langle \phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\rangle .$$

Keine Operatoren und Zeitordnungen mehr — alles ist „einfach"!
Ausserdem scheint das Integral exponentiell zu konvergieren.

Störungstheorie:

$$S_E = S_0 + S_I \quad , \text{ wo } S_0 \equiv \text{der quadratische Teil}.$$

Notation: $$\langle\ldots\rangle_0 \equiv \frac{\int\mathcal{D}\phi\,(\ldots)\,e^{-S_0}}{\int\mathcal{D}\phi\, e^{-S_0}} .$$

$$\Longrightarrow \quad G_\beta^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\langle \phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\exp(-S_I)\rangle_0}{\langle\exp(-S_I)\rangle_0} .$$

Man braucht nur eine Taylor-Entwicklung in S_I!

Das Wick-Theorem

Wir sind also Objekten der Art $\langle \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle_0$ begegnet.
Diese können durch das Wick-Theorem zu $\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_0$ usw. reduziert werden.
Um das zu sehen, tun wir Folgendes:

* Wir sammeln $\phi(x)$, $\forall x$, in einem einzigen Vektor $\vec{v}$.
* Dann ist $S_0 = \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v}$, wobei A eine Matrix ist. Wir nehmen an: $A^{-1} \exists$, $A^T = A$.
* Der Trick [Schwinger]: Einführung eines „Quellenvektors" $\vec{J}$.

$$\int d\vec{v}\, e^{-\frac{1}{2}\vec{v}^T A \vec{v} + \vec{J}^T \vec{v}} \overset{\substack{\vec{v} \to \vec{v} + A^{-1}\vec{J} \\ \vec{v}^T \to \vec{v}^T + \vec{J}^T A^{-1}}}{=} \int d\vec{v}\, e^{-\frac{1}{2}\vec{v}^T A \vec{v} - \frac{1}{2}\cancel{\vec{J}^T \vec{v}} - \frac{1}{2}\cancel{\vec{v}^T \vec{J}} - \frac{1}{2}\vec{J}^T A^{-1} \vec{J} + \cancel{\vec{J}^T \vec{v}} + \vec{J}^T A^{-1} \vec{J}}$$

$$= e^{+\frac{1}{2}\vec{J}^T A^{-1} \vec{J}} \int d\vec{v}\, e^{-\frac{1}{2}\vec{v}^T A \vec{v}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int d\vec{v}\, e^{-\frac{1}{2} v_i A_{ij} v_j + J_i v_i} = e^{+\frac{1}{2} J_i A^{-1}_{ij} J_j} \int dv\, e^{-\frac{1}{2} v_i A_{ij} v_j} \equiv e^{W(\vec{J})} .$$

$$\Rightarrow \quad \langle v_{\underset{\sim}{i}} v_{\underset{\sim}{j}} \cdots v_{\underset{\sim}{k}} \rangle_0 = \frac{\int d\vec{v}\; v_{\underset{\sim}{i}} v_{\underset{\sim}{j}} \cdots v_{\underset{\sim}{k}}\, e^{-\frac{1}{2} v_i A_{ij} v_j}}{\int d\vec{v}\, e^{-\frac{1}{2} v_i A_{ij} v_j}} = \frac{\left(\frac{d}{dJ_{\underset{\sim}{i}}} \frac{d}{dJ_{\underset{\sim}{j}}} \cdots \frac{d}{dJ_{\underset{\sim}{k}}} \right) e^{W(\vec{J})} \Big|_{\vec{J}=0}}{e^{W(0)}}$$

$$= \left(\frac{d}{dJ_{\underset{\sim}{i}}} \frac{d}{dJ_{\underset{\sim}{j}}} \cdots \frac{d}{dJ_{\underset{\sim}{k}}} \right) e^{\frac{1}{2} J_i A^{-1}_{ij} J_j} \Big|_{\vec{J}=0}$$

$$= \left(\frac{d}{dJ_{\underset{\sim}{i}}} \frac{d}{dJ_{\underset{\sim}{j}}} \cdots \frac{d}{dJ_{\underset{\sim}{k}}} \right) \left[1 + \frac{1}{2} J_i A^{-1}_{ij} J_j + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 J_i A^{-1}_{ij} J_j J_k A^{-1}_{kl} J_l + \ldots \right] \Big|_{\vec{J}=0}$$

$\Rightarrow$

* $\langle 1 \rangle_0 = 1$
* Ungerade Anzahl von v's $\Rightarrow$ $\langle \ldots \rangle_0 = 0$.
* $\langle v_{\underset{\sim}{i}} v_{\underset{\sim}{j}} \rangle_0 = (A^{-1})_{\underset{\sim}{ij}} \equiv \underbrace{v_{\underset{\sim}{i}} v_{\underset{\sim}{j}}}$
* $\langle v_{\underset{\sim}{i}} v_{\underset{\sim}{j}} v_{\underset{\sim}{k}} v_{\underset{\sim}{l}} \rangle_0 = (A^{-1})_{\underset{\sim}{ij}} (A^{-1})_{\underset{\sim}{kl}} + (A^{-1})_{\underset{\sim}{ik}} (A^{-1})_{\underset{\sim}{jl}} + (A^{-1})_{\underset{\sim}{il}} (A^{-1})_{\underset{\sim}{jk}}$

Aufgabe 9.2

$$= \underbrace{v_{\underset{\sim}{i}} v_{\underset{\sim}{j}}}\, \underbrace{v_{\underset{\sim}{k}} v_{\underset{\sim}{l}}} + v_{\underset{\sim}{i}} v_{\underset{\sim}{j}} v_{\underset{\sim}{k}} v_{\underset{\sim}{l}} + v_{\underset{\sim}{i}} v_{\underset{\sim}{j}} v_{\underset{\sim}{k}} v_{\underset{\sim}{l}}$$

* im Allgemeinen:

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \rangle_0 = \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Kombinationen}}} \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_0 \cdots \langle \cdots \phi(x_n) \rangle_0 .$$

Der Propagator $\langle \phi(x)\phi(y)\rangle_0$

(a) der einfache Weg

Was ist jetzt A?

$$S_0 = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right\} \qquad \Big| \; d^4x \equiv d\tau\, d^3\vec{x}$$

partielle Integration (mit periodischen oder verschwindenden Randbedingungen)

$$= \int d^4x \int d^4y \; \frac{1}{2}\phi(x) \underbrace{\left[\delta^{(4)}(x-y)(-\partial_\mu^2 + m^2)\right]}_{\equiv A_{x,y}} \phi(y) .$$

Wie finden wir A^{-1}?

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\Longleftrightarrow \int d^4y \; \delta(x-y)(-\partial_\mu^{y2} + m^2) A^{-1}_{y,z} = (-\partial_\mu^{x2} + m^2) A^{-1}_{x,z} \equiv \delta^{(4)}(x-z) .$$

Behauptung:

$$A^{-1}_{x,z} = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{P^2 + m^2} \cdot e^{iP_\mu(x_\mu - z_\mu)} \qquad \text{(Seite 15)}$$

Beweis:

$$(-\partial_\mu^{x2} + m^2) A^{-1}_{x,z} = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \frac{P^2+m^2}{P^2+m^2} e^{iP_\mu(x_\mu - z_\mu)} = \delta^{(4)}(x-z) \qquad \square .$$

(b) ein wenig genauer

Wir arbeiten im Fourier-Raum.
Um Singularitäten zu vermeiden, lassen wir vorübergehend das Viervolumen $V \equiv L_0 L_1 L_2 L_3$ endlich sein, und geben $\phi(x)$ periodische Randbedingungen in allen Richtungen. $(L_0 \equiv \beta)$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \tilde{\phi}(P)\, e^{iP_\mu x_\mu} \\ \phi(x + L_\nu) &= \phi(x) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_\nu = \frac{2\pi}{L_\nu} \cdot n_\nu , \quad n_\nu \in \mathbb{Z} , \quad \nu = 0,1,2,3 .$$

Dann schreiben wir

$$\phi(x) = \frac{1}{V} \sum_P \tilde{\phi}(P)\, e^{iP_\mu x_\mu} \xrightarrow[\text{[Aufgabe 10.2]}]{V \to \infty} \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(P)\, e^{iP\cdot x} .$$

Deltafunktionen:

$$\bar{\delta}(P+Q) \equiv \begin{cases} V \cdot \delta_{P+Q,0} & , \; V \text{ endlich} \\ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P+Q) & , \; V \text{ unendlich} \end{cases} .$$

Kronecker

Dirac

Notation: $\int_P \equiv \begin{cases} \frac{1}{V}\sum_P , & V \text{ endlich} \\ \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} , & V \text{ unendlich.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \langle \phi(x)\phi(y)\rangle_0 = \int_{P,Q} e^{iP\cdot x + iQ\cdot y} \langle \tilde\phi(P)\tilde\phi(Q)\rangle_0$$

$$S_0 = \frac{1}{2}\int d^4x \int_{P,Q} \{ iP_\mu \tilde\phi(P)\, iQ_\mu \tilde\phi(Q) + m^2 \tilde\phi(P)\tilde\phi(Q) \} e^{iP\cdot x + iQ\cdot x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_P \tilde\phi(-P)[P^2+m^2]\tilde\phi(P) .$$

Aufpassen: $\phi(x) = \int_P e^{iP\cdot x}\tilde\phi(P) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \tilde\phi^*(P) = \tilde\phi(-P)$.

Wir schreiben $\tilde\phi(P) = a(P) + i b(P) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a(-P) = a(P) \\ b(-P) = -b(P) \end{matrix}$.

Das heisst, nur die Hälfte der Fourier-Komponenten sind unabhängig. Wir wählen diejenigen mit $P_0 > 0$ [oder, für $P_0 = 0$, $P_1 > 0$, usw.].

Dann ist:

$$\langle \tilde\phi(P)\tilde\phi(Q)\rangle_0 = \langle a(P)a(Q) + i b(P)a(Q) + i a(P)b(Q) - b(P)b(Q)\rangle_0$$

$$S_0 = \frac{1}{V}\sum_{P,\,P_0>0} (P^2+m^2)[a^2(P) + b^2(P)] .$$

Durch Benutzung des gaussischen Integrals $\dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-ax^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2}} = \dfrac{1}{2a}$ erhalten wir:

$$\langle a(P)b(Q)\rangle_0 = \langle b(P)a(Q)\rangle_0 = 0 ,$$

$$\langle a(P)a(Q)\rangle_0 = \frac{V}{2(P^2+m^2)}[\delta_{P,Q} + \delta_{P,-Q}],$$

$$\langle b(P)b(Q)\rangle_0 = \frac{V}{2(P^2+m^2)}\cdot[\delta_{P,Q} - \delta_{P,-Q}],$$

$$\Rightarrow \quad \langle \tilde\phi(P)\tilde\phi(Q)\rangle_0 = \frac{V\delta_{P,-Q}}{P^2+m^2} = \frac{V\delta_{P+Q,0}}{P^2+m^2} = \delta(P+Q)\cdot\frac{1}{P^2+m^2} .$$

Jetzt können wir $V\to\infty$ schicken. Fazit:

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \tilde\phi(P)\tilde\phi(Q)\rangle_0 &= \delta(P+Q)\cdot\frac{1}{P^2+m^2} , \\ \langle \phi(x)\phi(y)\rangle_0 &= \int_P e^{iP\cdot(x-y)}\frac{1}{P^2+m^2} . \end{aligned}}$$

——— ∘ ———