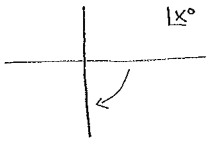
2. Pfadintegralquantisierung von Skalarfeldern

Die kanonische Quantisierung einer Feldtheorie hat einige Probleme: zum Beispiel ist nicht klar, ob alles auch ausserhalb der Störungstheorie wohldefiniert ist. Zudem ist die Formulierung nicht offenkundig Lorentzinvariant, weil Zeit eine andere Rolle spielt als die Raumkoordinaten. Diese Probleme werden durch den Pfadintegralformalismus gelöst.

2.1. Pfadintegral in der Quantenmechanik à la Feynman, Hibbs und Schwinger

Vorbereitungen

(i) Es ist sehr nützlich, eine Wick-Drehung (Seiten 13, 16) schon ganz am Anfang durchzuführen, und erst ganz am Ende zum Minkowski-Raum zurückzukehren. Also:



$$x^0 = -i\tilde{x}^0$$

$$\Leftrightarrow\ t = -i\tau$$

Im Heisenberg-Bild: $\hat{x}_H = e^{i\hat{H}t}\,\hat{x}\,e^{-i\hat{H}t} \equiv e^{\hat{H}\tau}\,\hat{x}\,e^{-\hat{H}\tau}$.

(ii) Nach der Wick-Drehung sind wir interessiert an (Seiten 13, 21):

$$G_E^{(n)}(\tau_1,\dots,\tau_n) = \langle 0|T\{\hat{x}_H(\tau_1)\cdots\hat{x}_H(\tau_n)\}|0\rangle .$$

Wir nehmen an, dass $\tau_1,\dots,\tau_n \geq 0$. Statt $G_E^{(n)}$ betrachten wir jetzt

$$G_\beta^{(n)}(\tau_1,\dots,\tau_n) \equiv \frac{\mathrm{Sp}\left[e^{-\beta\hat{H}}\,T\{\hat{x}_H(\tau_1)\dots\hat{x}_H(\tau_n)\}\right]}{\mathrm{Sp}\left[e^{-\beta\hat{H}}\right]} .$$

Es ist leicht zu argumentieren [Aufgabe 9.1], dass $\lim_{\beta\to\infty} G_\beta^{(n)} = G_E^{(n)}$.

(iii) Zur Erinnerung:

$$\langle p|\hat{p}|x\rangle = p\langle p|x\rangle = -i\partial_x\langle p|x\rangle \quad\Rightarrow\quad \langle p|x\rangle = A e^{ipx} .$$

$$\int dx\, |x\rangle\langle x| = \mathbb{1}$$

$$\int \frac{dp}{B}\, |p\rangle\langle p| = \mathbb{1} \qquad \text{Was sind } A \text{ und } B\text{?}$$

$$\mathbb{1} = \int dx \int\frac{dp}{B}\int\frac{dp'}{B}\, |p\rangle\underbrace{\langle p|x\rangle\langle x|p'\rangle}_{|A|^2 e^{ix(p-p')}}\langle p'| = \frac{|A|^2}{B^2}\int dp\int dp'\, 2\pi\,\delta(p-p')\,|p\rangle\langle p'|$$

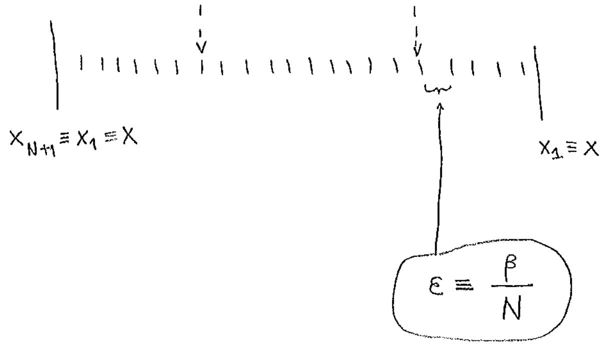
$$= \frac{|A|^2}{B}\cdot 2\pi \int\frac{dp}{B}\,|p\rangle\langle p|$$

$\Rightarrow\ 2\pi|A|^2 = B$. Wir wählen $A = 1 \Rightarrow B = 2\pi$ (oder $2\pi\hbar$).

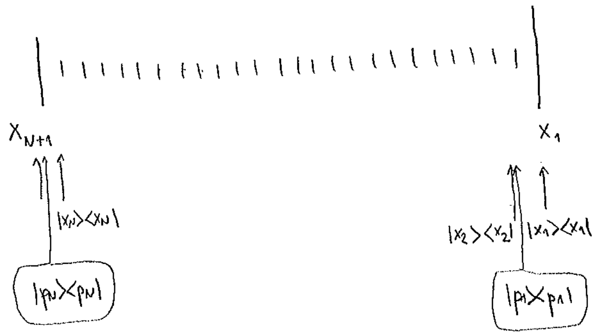
Jetzt folgen wir dem gewöhnlichen Prozedere. Seien z.B. $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\left[e^{-\beta \hat H}\, \hat x_H(\tau_1) \dots \hat x_H(\tau_n)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \langle x | e^{-(\beta-\tau_1)\hat H}\, \hat x \, e^{-(\tau_1-\tau_2)\hat H} \dots \hat x \, e^{-\tau_n \hat H} | x \rangle$$

Dann wird diskretisiert:



Wir schreiben $e^{-(\beta-\tau_1)\hat H} = \left[e^{-\varepsilon \hat H}\right]^{\frac{\beta-\tau_1}{\varepsilon}} = e^{-\varepsilon \hat H} e^{-\varepsilon \hat H} \dots e^{-\varepsilon \hat H}$ usw.



Wir führen $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1} = \int \frac{dp_i}{2\pi\hbar} |p_i\rangle\langle p_i| , \ i = 1, \dots, N \\ \mathbb{1} = \int dx_i \, |x_i\rangle\langle x_i| , \ i = 1, \dots, N \end{array} \right\}$ ein:

Gebraucht wird daher:

$$|x_{i+1}\rangle\langle x_{i+1}|p_i\rangle\langle p_i| e^{-\varepsilon \hat H}(\hat x)\,|x_i\rangle$$

je nach i

$$= |x_{i+1}\rangle \, e^{-i p_i x_{i+1}} \, e^{-\varepsilon H(p_i, x_i) + i p_i x_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \, (x_i)$$

$$= |x_{i+1}\rangle \exp\left[-\varepsilon \left\{ \frac{p_i^2}{2m} + i p_i \frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon} + V(x_i) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}\right] \cdot (x_i) \, .$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat H = \frac{\hat p^2}{2m} + V(\hat x) \\ H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \end{array}}$$

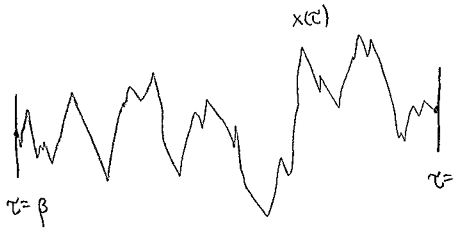
Danach dasselbe mit $|x_{i+2}\rangle\langle x_{i+2}|p_{i+1}\rangle\langle p_{i+1}| e^{-\varepsilon \hat H}(\hat x)\,|x_{i+1}\rangle$.

Damit werden wir die Operatoren los; alles wird klassisch.

Am Ende haben wir also:

$$\mathrm{Sp}\left[e^{-\beta\hat{H}}\,\hat{x}_H(\tau_1)\ldots\hat{x}_H(\tau_n)\right] = \lim_{N\to\infty}\int\left[\prod_{i=1}^{N}\frac{dx_i\,dp_i}{2\pi}\right]\exp\left\{-\sum_{j=1}^{N}\varepsilon\left[\frac{p_j^2}{2m}+ip_j\frac{x_{j+1}-x_j}{\varepsilon}+V(x_j)\right]\right\}x(\tau_1)\cdots x(\tau_n)\Bigg|_{\substack{x_{N+1}\equiv x_1\\ \varepsilon\equiv\frac{\beta}{N}}}$$

$$\equiv \int\limits_{x(\beta)=x(0)}\mathcal{D}x\int\frac{\mathcal{D}p}{2\pi}\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{[p(\tau)]^2}{2m}+ip(\tau)\dot{x}(\tau)+V(x(\tau))\right]\right\}x(\tau_1)\ldots x(\tau_n)\,.$$



Die Integrationen über die p_i sind quadratisch und können durchgeführt werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_i}{2\pi}\exp\left[-\varepsilon\left(\frac{p_i^2}{2m}+ip_i\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{\pi\cdot 2m}{\varepsilon}}\cdot\exp\left[-\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4\cdot\frac{\varepsilon}{2m}}\right]$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}dp\,e^{-ap^2-ibp} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\;e^{-\frac{b^2}{4a}}}$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{Sp}\left[e^{-\beta\hat{H}}\,\hat{x}_H(\tau_1)\ldots\hat{x}_H(\tau_n)\right] = \lim_{N\to\infty}\int\left[\prod_{i=1}^{N}\frac{dx_i}{\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{m}}}\right]\exp\left\{-\sum_{j=1}^{N}\varepsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\varepsilon}\right)^2+V(x_j)\right]\right\}x(\tau_1)\ldots x(\tau_n)\Bigg|_{\substack{x_{N+1}\equiv x_1\\ \varepsilon\equiv\frac{\beta}{N}}}$$

Also gilt:

$$\boxed{G_\beta^{(n)}(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \frac{\int\limits_{x(\beta)=x(0)}\mathcal{D}x\;\;x(\tau_1)\ldots x(\tau_n)\;\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+V(x(\tau))\right]\right\}}{\int\limits_{x(\beta)=x(0)}\mathcal{D}x\;\;\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+V(x(\tau))\right]\right\}}\,.}$$

(Es gibt Freiheit in der Definition von $\mathcal{D}x$, weil sich konstante Faktoren zwischen Zähler und Nenner kürzen — im Folgenden benutzen wir

$$\int\mathcal{D}x \equiv \lim_{N\to\infty}\int\prod_{i=1}^{N}\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}}\,.$$
)

Zurück zum Minkowski-Raum

Die Wick-Drehung in die umgekehrte Richtung:

$$\tau = it$$
$$d\tau = i\,dt$$
$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = -\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$
$$-\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x)\right] = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) = L \equiv L_M \quad !$$

Wir müssen auch $\beta \to \infty$ schicken. Weiterhin können in diesem Limes die Zeitkoordinaten auch negativ sein — alles hängt ja nur von ihren Differenzen ab.

$$\Longrightarrow \quad G_T^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{\int \mathcal{D}x \; x(t_1) \dots x(t_n) \, \exp\left\{ i \int dt \, L_M \right\}}{\int \mathcal{D}x \, \exp\left\{ i \int dt \, L_M \right\}} .$$

Verallgemeinerung zur Feldtheorie

Alles was wir getan haben, wäre auch für einen Vektor möglich: $x \to \vec{x}$. Aber ein Feld kann auch als ein Vektor betrachtet werden, falls wir den Raum diskretisieren:

$$\phi(t, \vec{x}) \rightarrow \phi(t, \vec{x}_n) \equiv \vec{X}(t), \quad \text{wo} \quad [\vec{X}(t)]_n \equiv \phi(t, \vec{x}_n) .$$

Wir brauchen also nur $x \to \phi$, $m \to 1$ zu schicken, und $V(x)$ durch den kompletten „räumlichen" Teil der Lagrange-Dichte zu ersetzen.

$$\Longrightarrow \quad G_T^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \; \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \, \exp\left\{ i \int dt \, L_M \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ i \int dt \, L_M \right\}} ,$$

wobei $L_M = \int d^3x \; \mathcal{L}_M$, $\quad \mathcal{L}_M = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)^2 + V(\phi)\right]$

$$= \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \, \partial_\mu \phi - V(\phi)$$