1.7 Störungstheorie

Wir haben gelernt, dass alle interessanten Informationen in den Green-Funktionen

$$G_T^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\dots\hat\phi_I(x_n)\hat S\}|0\rangle}{\langle 0|\hat S|0\rangle},$$

$$\hat S = T\left\{\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\hat H_I(t)\right]\right\},$$

und in deren Fourier-Transformationen enthalten sind. Jetzt sollten wir also diese Funktionen bestimmen.

Eine Bestimmung ist in der Tat möglich, falls $\hat H_I$ in einem angemessenen Sinne „klein" ist. Dann können wir $\hat H_I$ als eine Störung um den freien Fall behandeln.

Um das Prozedere zu illustrieren, betrachten wir die klassische Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathcal{L}_{int}$$

$$\mathcal{L}_{int} \equiv -\frac{1}{4!}\lambda\phi^4.$$

Dann ist $\hat H_I = \int d^3\vec x\, \mathcal{H}_{int}\Big|_{\phi\to\hat\phi_I} = \int d^3\vec x\, \frac{\lambda}{4!}\hat\phi_I^4(x)$.

Der Operator $\hat S$ wird, wie seine Definition verlangt, als eine Taylor-Reihe entwickelt. Weil offensichtlich

$$T\{\hat\phi_I(x_1)\dots\hat\phi_I(x_n)\,T\{\hat\phi_I(y_1)\dots\hat\phi_I(y_m)\}\}$$
$$= T\{\hat\phi_I(x_1)\dots\hat\phi_I(x_n)\hat\phi_I(y_1)\dots\hat\phi_I(y_m)\}$$

gilt, erhalten wir

$$G_T^{(n)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)^j\frac{1}{j!}\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\dots\hat\phi_I(x_n)\left[\int d^4y\,\hat\phi_I^4(y)\right]^j\}|0\rangle}{\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)^j\frac{1}{j!}\langle 0|T\{\left[\int d^4y\,\hat\phi_I^4(y)\right]^j\}|0\rangle}$$

Um $\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\,\dots\,\hat\phi_I(y)\}|0\rangle$ zu berechnen, bedienen wir uns des Wick-Theorems.

Das Wick-Theorem

Seite 15 : $\langle 0 | T\{\hat\phi_I(x)\hat\phi_I(y)\} | 0 \rangle = G_F(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i0^+} e^{ip\cdot(y-x)}$.

Seite 12 : $\langle 0 | : \hat O : | 0 \rangle = 0$.

Im Allgemeinen:

$$\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2) \neq \; :\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2): + \langle 0|\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)|0\rangle$$

Weiterhin gilt [Aufgabe 7.2]

$$:\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2): \; = \; :\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_1): \;,$$

und damit

$$T\{\hat\phi_I(x)\hat\phi_I(y)\} = \hat\phi_I(x)\hat\phi_I(y)\,\Theta(x^0-y^0) + \hat\phi_I(y)\hat\phi_I(x)\,\Theta(y^0-x^0)$$

$$= \; :\hat\phi_I(x)\hat\phi_I(y): \left[\Theta(x^0-y^0)+\Theta(y^0-x^0)\right]$$

$$+ \langle 0|T\{\hat\phi_I(x)\hat\phi_I(y)\}|0\rangle$$

$$= \; :\hat\phi_I(x)\hat\phi_I(y): + G_F(x,y) .$$

Notation: $G_F(x,y) = \langle 0|T\{\hat\phi_I(x)\hat\phi_I(y)\}|0\rangle =: \underbrace{\hat\phi_I(x)\hat\phi_I(y)}$.

Behauptung:

$$T\{\hat\phi_I(x_1)\dots\hat\phi_I(x_n)\} = \; :\hat\phi_I(x_1)\dots\hat\phi_I(x_n):$$

$$+ \sum_{jk} :\hat\phi_I(x_1)\dots\cancel{\hat\phi_I(x_j)}\dots\cancel{\hat\phi_I(x_k)}\dots\hat\phi_I(x_n): \underbrace{\hat\phi_I(x_j)\hat\phi_I(x_k)}$$

$$+ \sum_{jklm} :\hat\phi_I(x_1)\;\cancel{\hat\phi_I(x_j)}\;\cancel{\hat\phi_I(x_k)}\;\cancel{\hat\phi_I(x_l)}\;\cancel{\hat\phi_I(x_m)}\;\hat\phi_I(x_n): \underbrace{\hat\phi_I(x_j)\hat\phi_I(x_k)}\;\underbrace{\hat\phi_I(x_l)\hat\phi_I(x_m)}$$

$$+ \dots$$

$$+ \sum_{jklm\dots} \underbrace{\hat\phi_I(x_j)\hat\phi_I(x_k)}\;\underbrace{\hat\phi_I(x_l)\hat\phi_I(x_m)}\dots .$$

Beweis: $n=3$ in der Aufgabe 8.1, der allgemeine Fall später mit anderen Methoden.

Setzen wir $T\{\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\}$ innerhalb von $\langle 0|\cdots|0\rangle$ ein, Verschwinden alle normalgeordneten Terme! Das heisst,

$$\boxed{\langle 0|T\{\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\}|0\rangle = \sum_{\substack{\text{alle}\\ \text{Möglichkeiten}}} \underbrace{\hat{\phi}_I(x_j)\hat{\phi}_I(x_k)}\;\underbrace{\hat{\phi}_I(x_l)\hat{\phi}_I(x_m)}\;\cdots}$$

Insbesondere: $\langle 0|T\{\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\}|0\rangle = 0$ für alle ungeraden n.

Graphisch:

$$\underbrace{\hat{\phi}_I(x_j)\hat{\phi}_I(x_k)} =: \overset{x_j}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{x_k}{\bullet}$$

Als ein Beispiel, betrachten wir $G_T^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Ordnung λ^0

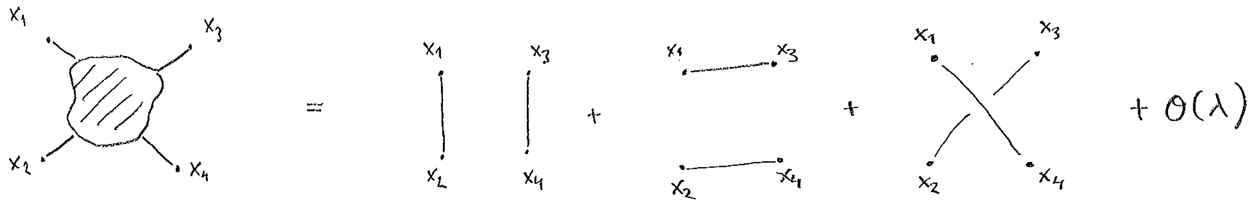
$$G_T^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\langle 0|T\{\hat{\phi}_I(x_1)\hat{\phi}_I(x_2)\hat{\phi}_I(x_3)\hat{\phi}_I(x_4)\}|0\rangle}{\langle 0|0\rangle}$$

1

$$\overset{\text{Wick}}{=} \underbrace{\hat{\phi}_I(x_1)\hat{\phi}_I(x_2)}\;\underbrace{\hat{\phi}_I(x_3)\hat{\phi}_I(x_4)}$$

$$+ \hat{\phi}_I(x_1)\hat{\phi}_I(x_2)\hat{\phi}_I(x_3)\hat{\phi}_I(x_4)$$

$$+ \hat{\phi}_I(x_1)\underbrace{\hat{\phi}_I(x_2)\hat{\phi}_I(x_3)}\hat{\phi}_I(x_4)$$



Diese Diagramme gehören aber nicht zur $G_{T,C}^{(n)}$!

Ordnung λ^1

$$G_T^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)\,[\mathbb{1} - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4y\,\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)]\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\mathbb{1} - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4y\,\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\hat\phi_I(y)\}|0\rangle}$$

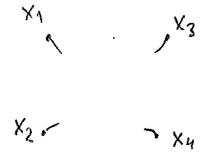
$$= \mathcal{O}(\lambda^0)$$

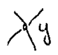
$$- \frac{i\lambda}{4!}\int d^4y \Big[\langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)\,\hat\phi_I^4(y)\}|0\rangle$$

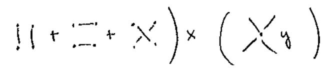
$$- \langle 0|T\{\hat\phi_I(x_1)\hat\phi_I(x_2)\hat\phi_I(x_3)\hat\phi_I(x_4)\}|0\rangle\langle 0|T\{\hat\phi_I^4(y)\}|0\rangle \Big]$$

$$+ \mathcal{O}(\lambda^2).$$

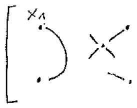
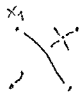
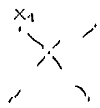
Graphisch:

$[\ldots] =$ 



$-$ 

⇒ Wir müssen mindestens ein x_i mit y „Kontrahieren". Hier alle Möglichkeiten mit x_1.

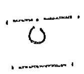
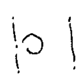
$= 4\,[$  $+$  $+$  $+$  $]$

(a) (b) (c) (d)

Anzahl Möglichkeiten

(a) 4×3    (b) 4×3    (c) 4×3 

(d) $4_{\text{mit } x_2}\,[\,3$  $+\,3$  $+\,3$  $]$

$= 4\times3$  $+\,4\times3$  $+\,4\times3$  $+\,4\times3\times2$ 

Zusammenhängend!

Zum Nachprüfen:

Anzahl Kontraktionen sollte sein: $7\times5\times3\times1 - 3\times3 = 105 - 9 = 96$

Wir haben gefunden: $\underbrace{6\times4\times3}_{(a)+(b)+(c)+\text{ ersten drei von (d)}} + 4\times3\times2 = 72 + 24 = 96$ ok!

Weitere Schritte: Aufgabe 8.2.