1.6 Green-Funktionen und LSZ-Reduktion

Im vorigen Kapitel haben wir ein Streumatrixelement S_{fi} definiert, $S_{fi} = \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m; \text{in} | \hat{S} | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; \text{in} \rangle$, wobei alles mit den „freien Feldern" $\hat{\phi}_{in}(t) = \hat{\phi}_I(t)$ ausgedrückt werden kann. Würden wir $\hat{S}$ in eine Störungsreihe in $\hat{H}_I$ entwickeln, könnten wir damit schon physikalische Grössen berechnen. Bevor wir dies tun, zeigt es sich allerdings als nützlich, S_{fi} noch mit theoretisch „schöneren" Grössen, Green-Funktionen, in Beziehung zu bringen.

Allgemeine Definitionen : (vgl. S. 13)

$$G_T^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T\{ \hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) \} | 0 \rangle \quad ; \quad \hat{\phi}_H \text{ im Heisenberg-Bild} .$$

Es kann sein, dass $G_T^{(n)}$ einen Teil der Form $\langle 0 | T\{\cdots\} | 0 \rangle \langle 0 | T\{\cdots\} | 0 \rangle$ enthält ; wir nennen solche Teile „nicht-zusammenhängend" [„disconnected"] .

$$G_{T,c}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T\{ \hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) \} | 0 \rangle_c$$

nur der zusammenhängende [„connected"] Teil wird berücksichtigt.

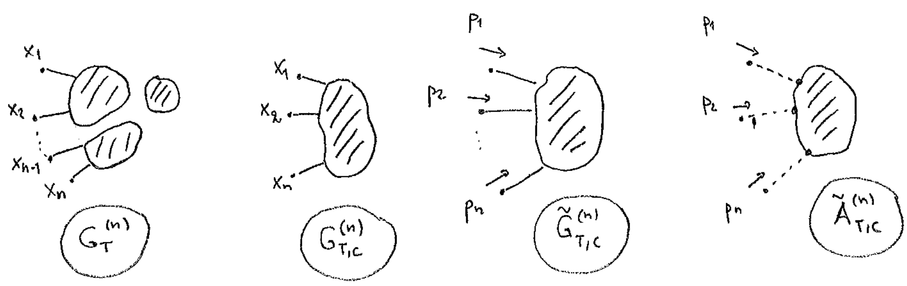
Fourier-Transformation :

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) \, \tilde{G}_{T,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \, G_{T,c}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \, e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} .$$

„Amputierung der externen Beine":

$$\tilde{A}_{T,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \left[\tilde{G}_{T,c}^{(2)}(p_1, -p_1) \right]^{-1} \cdots \left[\tilde{G}_{T,c}^{(2)}(p_n, -p_n) \right]^{-1} \tilde{G}_{T,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) .$$

Graphisch :



Notabene : Schon die volle 2-Punkt-Funktion $\tilde{G}_{T,c}^{(2)}$ =  ist äusserst nichttrivial, und enthält fast alle Informationen über die Wechselwirkungen des Teilchens!

Drücken wir zuerst die Green-Funktionen mit den Dirac-Bild-Feldern $\hat{\phi}_I$ aus.
Die Beziehung von $\hat{\phi}_I$ und $\hat{\phi}_H$:

$$* \quad |t;I\rangle = e^{i\hat{H}_0 t}|t;S\rangle$$
$$= e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}t}|0;S\rangle = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} e^{-i\hat{H}_0 t_0}|t_0;I\rangle$$
$$\Longrightarrow \hat{U}_I(t,t_0) = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} e^{-i\hat{H}_0 t_0} \qquad [\text{Aufgabe } 6.1]$$
$$* \quad \hat{\phi}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{\phi}_S e^{-i\hat{H}t} = e^{i\hat{H}t}e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{\phi}_I(t) e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}t}$$
$$= \hat{U}_I^+(t,0)\,\hat{\phi}_I(t)\,\hat{U}_I(t,0).$$

Betrachten wir dann $G_T^{(n)}$. Falls zum Beispiel $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$, gilt:

$$G_T^{(n)} = \langle 0|\hat{\phi}_H(x_1)\ldots\hat{\phi}_H(x_n)|0\rangle$$
$$= \langle 0|\hat{U}_I^+(t_1,0)\hat{\phi}_I(x_1)\hat{U}_I(t_1,0)\hat{U}_I^+(t_2,0)\hat{\phi}_I(x_2)\hat{U}_I(t_2,0)\ \ldots\ \hat{U}_I^+(t_n,0)\hat{\phi}_I(x_n)\hat{U}_I(t_n,0)|0\rangle$$
$$= \langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)\{\hat{U}_I(T,0)\hat{U}_I^+(t_1,0)\hat{\phi}_I(x_1)\ \ldots\ \hat{\phi}_I(x_n)\hat{U}_I(t_n,0)\hat{U}_I^+(-T,0)\}\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle$$
$$\overset{\text{Aufgabe 6.1}}{=} \langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)\{\hat{U}_I(T,t_1)\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\hat{U}_I(t_n,-T)\}\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle$$
$$= \langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)\,T\{\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\,\hat{U}_I(T,t_1)\ldots\hat{U}_I(t_n,-T)\}\,\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle$$
$$= \langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)\,T\{\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\,\hat{U}_I(T,-T)\}\,\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle$$

$\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$ $\qquad$ $\mathbb{1} = \sum_m |m\rangle\langle m|$

Jetzt schicken wir $T \to \infty$.
Es ist anzunehmen, dass die langen Zeitentwicklungen durch den Grundzustand dominiert werden [dies könnte mittels eines kleinen Imaginärteils in T garantiert werden].

$$\Longrightarrow \langle 0|\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle \overset{T\gg 1}{\cong} e^{i\alpha T}$$
$$\langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)|0\rangle \underset{\text{Aufgabe 6.1}}{=} \langle 0|\hat{U}_I(0,T)|0\rangle \overset{T\gg 1}{\cong} e^{i\beta T}$$

Aber dann ist

$$\langle 0|\hat{U}_I(T,0)|0\rangle = e^{-i\alpha T}$$
$$\langle 0|\hat{U}_I(0,-T)|0\rangle = e^{-i\beta T}$$

$$\Longrightarrow \langle 0|\hat{U}_I^+(T,0)|0\rangle\langle 0|\hat{U}_I(-T,0)|0\rangle = e^{i\beta T}e^{i\alpha T} = \frac{1}{e^{-i\alpha T}e^{-i\beta T}} = \frac{1}{\langle 0|\hat{U}_I(T,0)\hat{U}_I(0,-T)|0\rangle}$$

$$\Longrightarrow \boxed{G_T^{(n)} = \frac{\langle 0|T\{\hat{\phi}_I(x_1)\ldots\hat{\phi}_I(x_n)\,\hat{S}\}|0\rangle}{\langle 0|\hat{S}|0\rangle} \qquad \text{mit } \hat{S} = \hat{U}_I(\infty,-\infty) = T\left\{\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\hat{H}_I(t)\right]\right\}},$$

Um uns jetzt in die Richtung der gewünschten Beziehung zu bewegen, erinnern wir uns an einige Matrixelemente des freien Skalarfeldes. Aus Seite 10:

$$\hat{\phi}_I(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \langle 0| \hat{\phi}_I(x) |\vec{k}; in\rangle = \langle 0| \hat{\phi}_I(x)\, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}}\, e^{-ik\cdot x},$$

$$\langle \vec{p}; in| \hat{\phi}_I(x) |0\rangle = \langle 0| \hat{a}_{\vec{p}}\, \hat{\phi}_I(x) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}\, e^{ip\cdot x}.$$

Notabene:

(i) In der Literatur gibt es viele verschiedene Konventionen bzgl. Faktoren wie $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}$. Nur die physikalischen Endergebnisse sind immer dieselben.

(ii) Im Allgemeinen könnte $\hat{\phi}_I(x)$ anstelle eines „elementaren Feldes" auch ein „interpolierender Operator" sein. Dann führen wir eine „Normierungskonstante" Z_ϕ ein, und schreiben:

$$\langle 0| \hat{\phi}_I(x) |\vec{k}; in\rangle = \frac{\sqrt{Z_\phi}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}}}}\, e^{-ik\cdot x},$$

$$\langle \vec{p}; in| \hat{\phi}_I(x) |0\rangle = \frac{\sqrt{Z_\phi}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}\, e^{ip\cdot x}. \qquad (\square)$$

Das Streumatrixelement wird geschrieben als

$$S_{fi} = \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m; in| \hat{S} |\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; in\rangle$$

$$\equiv \delta_{mn} \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m; in| \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; in\rangle + i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_m - k_1 - \dots - k_n)\, T(p_1, \dots, p_m | k_1, \dots, k_n),$$

wo das Transitionsmatrixelement T der Form

$$T = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{k}_j}}}\, \mathcal{M}(p_1, \dots, p_m | k_1, \dots, k_n)$$

ist. Die Amplitude $\mathcal{M}$ tritt dann in der Goldenen Regel für den Streuquerschnitt auf [Theoretische Übungen].

Nun „sehen" wir, dass wir, um $\mathcal{M}$ zu bestimmen, zu tun haben mit:

* m Stück von $\langle \vec{p}_i ; in |$, n Stück von $| \vec{k}_j ; in \rangle$.

* Aber, wie die Gleichungen (□) auf Seite 23 zeigen, haben alle diese Objekte einen „Überlapp" mit $\hat{\phi}_I(x)|0\rangle$ bzw. $\langle 0|\hat{\phi}_I(x)$. D.h., sie können durch $\hat{\phi}_I$'s ersetzt werden!

* Man braucht allerdings Fourier-Transformationen, um die Impulse p_i, k_j aus den Koordinaten x_i zu erhalten.

* Weiterhin stehen die $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}$'s ausserhalb der $\mathcal{M}$: die „externen Beine" müssen „amputiert" werden.

In der Tat führt ein recht mühsamer Beweis zum folgenden Endergebnis, genannt die <u>LSZ-Reduktionsformel</u> [H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, Nuovo Cimento 1 (1955) 205]:

$$\boxed{\mathcal{M}(p_1,\dots,p_m|k_1,\dots,k_n) = (-i)\, Z_\phi^{\frac{n+m}{2}}\, \tilde{A}^{(n+m)}_{T,c}(-p_1,\dots -p_m, k_1,\dots,k_n)}$$

kürzt sich gegen $+i$ in der Definition $S_{fi} = \delta_{fi} + i\,T_{fi}$.

in $\tilde{A}_{T,c}$ hatten wir alle Impulse einlaufend, hier müssen also Minuszeichen auftreten, für die auslaufenden Impulse.

$\tilde{G}^{(n+m)}_{T,c}$ hat $Z_\phi^{\frac{n+m}{2}}$ „zu viel", wird dann aber durch $[\tilde{G}^{(2)}_{T,c}]^{n+m}$ dividiert, so dass $\tilde{A}^{(n+m)}_{T,c}$ $Z_\phi^{-\frac{n+m}{2}}$ „zu wenig" hat, was korrigiert werden muss.

<u>Fazit:</u> Alle physikalischen Informationen sind in Green-Funktionen enthalten. Wir müssen also lernen, sie zu bestimmen!

— o —