1.5 Wechselwirkende Skalarfelder; S-Matrix

Bislang haben wir <u>freie</u> Skalarfelder studiert; jetzt führen wir Wechselwirkungen ein. Dies kann am günstigsten im sogenannten <u>Dirac-Bild</u> bzw. <u>Wechselwirkungsbild</u> getan werden.

Sei $\hat{H} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$.

Im Schrödinger-Bild:
$$i\frac{d}{dt}|t;s\rangle = \hat{H}|t;s\rangle ,$$
$$i\frac{d}{dt}\hat{O}_s = 0 .$$

Im Heisenberg-Bild:
$$|H\rangle = |0;s\rangle$$
$$\hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{O}_s e^{-i\hat{H}t}$$

$$\Rightarrow \quad i\frac{d}{dt}|H\rangle = 0 ,$$
$$i\frac{d}{dt}\hat{O}_H(t) = [\hat{O}_H(t), \hat{H}] .$$

Im Dirac-Bild:

"Interaction"

$$|t;I\rangle \equiv e^{i\hat{H}_0 t}|t;s\rangle$$
$$\hat{O}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t}\hat{O}_s e^{-i\hat{H}_0 t} .$$

Damit wird
$$i\frac{d}{dt}\hat{O}_I(t) = -\hat{H}_0\hat{O}_I(t) + \hat{O}_I(t)\hat{H}_0 = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0]$$

und
$$i\frac{d}{dt}|t;I\rangle = e^{i\hat{H}_0 t}(-\hat{H}_0 + \hat{H})|t;s\rangle$$
$$= e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_{int}e^{-i\hat{H}_0 t}|t;I\rangle$$
$$\equiv \hat{H}_I(t)\,|t;I\rangle . \qquad (*)$$

Um nach einer Lösung von (*) zu suchen, schreiben wir
$$|t;I\rangle \equiv \hat{U}_I(t,t_0)|t_0;I\rangle .$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\frac{d}{dt}\hat{U}_I(t,t_0) = \hat{H}_I(t)\hat{U}_I(t,t_0) , \\ \hat{U}_I(t_0,t_0) = \mathbb{1} . \end{cases} \qquad (\square)$$

Am Ende wählt man meistens $t_0 = -\infty$.

Die Gleichungen (II) können in eine Integralgleichung umgeschrieben werden:

$$\hat{U}_I(t,t_0) = \mathbb{1} - i\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}_I(t')\, \hat{U}_I(t',t_0) .$$

Diese Form ermöglicht eine iterative Lösung:

$$\hat{U}_I(t,t_0) = \mathbb{1} - i\int_{t_0}^{t} dt_1\, \hat{H}_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1\, \hat{H}_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, \hat{H}_I(t_2) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\dots\hat{H}_I(t_n) .$$

Jetzt erinnern wir uns (Seite 13) an den Begriff der Zeitordnung:

$$T\{\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\dots\hat{H}_I(t_n)\} \equiv \begin{cases} \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\dots\hat{H}_I(t_n) & \text{für } t_1>t_2>\dots>t_n \\ \hat{H}_I(t_2)\hat{H}_I(t_1)\dots\hat{H}_I(t_n) & \text{für } t_2>t_1>\dots>t_n \\ \text{usw.} \end{cases}$$

Was in der Integration auftaucht kann also als zeitgeordnet betrachtet werden. Aber dann:

* es gibt $n!$ Ordnungen (für n Operatoren)
* jede Ordnung liefert einen identischen Beitrag, falls wir über alle Zeiten integrieren:

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t} dt_n\, T\{\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\dots\hat{H}_I(t_n)\}$$

$$= n! \times \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t} dt_n\, \underbrace{\hat{H}_I(t_2)\hat{H}_I(t_1)\dots\hat{H}_I(t_n)\,\Theta(t_2-t_1)\,\Theta(t_1-t_3)\dots\Theta(t_{n-1}-t_n)}_{\text{Beispiel}}$$

$$\begin{matrix} t_2 \equiv \tilde{t}_1 \\ t_1 \equiv \tilde{t}_2 \end{matrix} \quad \equiv \quad n! \times \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}_1 \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} d\tilde{t}_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, \hat{H}_I(\tilde{t}_1)\hat{H}_I(\tilde{t}_2)\dots\hat{H}_I(t_n)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{U}_I(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t} dt_n\, T\{\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\dots\hat{H}_I(t_n)\}$$

$$\equiv T\left\{\exp\left[-i\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}_I(t')\right]\right\} .$$

Kurz zusammengefasst, wir haben eine formale Lösung für eine allgemeine Zeitentwicklung gefunden. Für diese Lösung brauchen wir den Operator

$$\hat{H}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t}\,\hat{H}_{int}\,e^{-i\hat{H}_0 t}.$$

Falls $\hat{H}_{int}$ <u>ein Polynom in $\hat{\phi}_S$</u> ist, gilt

$$\begin{aligned}
\hat{H}_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t} \sum_n c_n \underbrace{\hat{\phi}_S \cdots \hat{\phi}_S}_{n\text{-mal}} e^{-i\hat{H}_0 t} \\
&= \sum_n c_n \, e^{i\hat{H}_0 t}\hat{\phi}_S e^{-i\hat{H}_0 t}\, e^{i\hat{H}_0 t}\hat{\phi}_S e^{-i\hat{H}_0 t} \cdots e^{i\hat{H}_0 t}\hat{\phi}_S e^{-i\hat{H}_0 t} \\
&\equiv \sum_n c_n \underbrace{\hat{\phi}_I(t) \cdots \hat{\phi}_I(t)}_{n\text{-mal}}
\end{aligned}$$

Die Felder $\hat{\phi}_I(t)$ sind aber den Heisenberg-Feldern <u>des nicht-wechselwirkenden Systems</u> identisch, das heisst, genau was wir vorher schon studiert haben. Also sollte jetzt alles in Ordnung sein.

Die Felder $\hat{\phi}_I(t)$ werden auch die „in"-Felder („einlaufend") $\hat{\phi}_{in}(t)$ genannt.

Die Matrix

$$\hat{S} \equiv \hat{U}_I(\infty,-\infty) = T\left\{\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\hat{H}_I(t)\right]\right\}$$

heisst <u>S-Matrix</u> (Streumatrix).

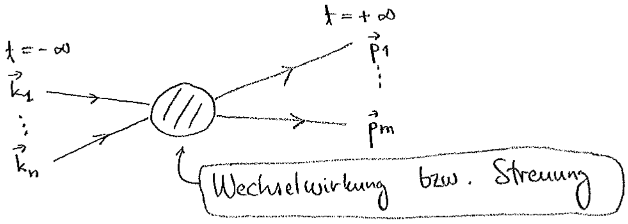
Es ist zu bemerken, dass $\hat{H}_{int}^{+} = \hat{H}_{int}$, $\hat{H}_0^{+} = \hat{H}_0$ zu $\hat{H}_I^{+}(t) = \hat{H}_I(t)$ führen, und daher

* $$\hat{S}^{+} = T\left\{\exp\left[+i\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\hat{H}_I(t)\right]\right\}$$

* $$\hat{S}^{+}\hat{S} = \hat{S}\hat{S}^{+} = \mathbb{1} \qquad [\text{Aufgabe } 6.2]$$

Das heisst, $\hat{S}$ ist unitär.

Letztendlich müssen wir noch physikalisch sinnvolle Zustände definieren. Was diese genau sein sollten, hängt einigermassen vom Kontext ab. Wir folgen hier den Konventionen der Teilchenphysik, wo sowohl der Anfangszustand als auch der Endzustand im Wesentlichen freie Teilchen auf der Massenschale enthalten:



Die einlaufenden Teilchen bzw. „in"-Zustände werden als Eigenzustände von $\hat{H}_0$ definiert, wie auf Seite 12:

$$|\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n \, ; \, \text{in}\rangle \equiv \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_1} \ldots \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_n} |0\rangle \; .$$

Die Zeitentwicklung bringt uns dann zum Zustand

$$\hat{S}\, |\vec{k}_1, \ldots \vec{k}_n \, ; \, \text{in}\rangle \; .$$

Am Ende messen wir, was für freie Teilchen zu sehen sind:

$$\begin{aligned} S_{fi} &\equiv \langle \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m \, ; \, \text{in} |\, \hat{S} \,| \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n \, ; \, \text{in} \rangle \\ &\equiv \langle \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m : \text{out} \,|\, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n \, ; \, \text{in} \rangle \; , \end{aligned}$$

wo $\quad |\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m \, ; \, \text{out}\rangle = \hat{S}^{+} |\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m \, ; \, \text{in}\rangle \; .$

Wir nennen S_{fi} ein Streumatrixelement. Wie man in den Theoretischen Übungen lernt, bestimmt $|S_{fi}|^2$ physikalische Grössen wie Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitte, aber in dieser Vorlesung brauchen wir die dazu noch fehlenden Schritte nicht zu kennen.

— ∘ —