1.4 Verschiedene Propagatoren

Wir werden jetzt verschiedene 2-Punkt-Green-Funktionen bzw. Propagatoren betrachten, die eine sehr wichtige Rolle in der Quantenfeldtheorie spielen.

$$W(x,y) \equiv \langle 0|\,\hat\phi(x)\hat\phi(y)\,|0\rangle \qquad \text{„Wightman-Funktion"}$$

Falls $x^0 = y^0$, gilt $W(x,y) = W(y,x)$; im Allgemeinen aber $W(x,y) \neq W(y,x)$!
Dies erlaubt die Definition vieler nichttrivialer Grössen:

$$* \qquad g(x,y) \equiv \langle 0|\,\tfrac{1}{2}\,[\hat\phi(x),\hat\phi(y)]\,|0\rangle$$

$$\Delta(x,y) \equiv \langle 0|\,\tfrac{1}{2}\,\{\hat\phi(x),\hat\phi(y)\}\,|0\rangle$$

$$G_R(x,y) \equiv i\,\langle 0|\,[\hat\phi(x),\hat\phi(y)]\,\theta(x^0-y^0)\,|0\rangle \qquad \text{„retardierte Green-Funktion"}$$

$$G_A(x,y) \equiv -i\,\langle 0|\,[\hat\phi(x),\hat\phi(y)]\,\theta(y^0-x^0)\,|0\rangle \qquad \text{„avancierte Green-Funktion"}$$

$$* \qquad G_F(x,y) \equiv \langle 0|\,\hat\phi(x)\hat\phi(y)\,\theta(x^0-y^0) + \hat\phi(y)\hat\phi(x)\,\theta(y^0-x^0)\,|0\rangle$$

$$\equiv \langle 0|\,T\{\hat\phi(x)\hat\phi(y)\}\,|0\rangle \qquad \text{„zeitgeordnete Green-Funktion" bzw. „Feynman-Propagator"}$$

$$* \qquad G_E(\tilde x,\tilde y) \equiv \langle 0|\,\hat\phi(\tilde x)\hat\phi(\tilde y)\,\theta(\tilde x^0-\tilde y^0) + \hat\phi(\tilde y)\hat\phi(\tilde x)\,\theta(\tilde y^0-\tilde x^0)\,|0\rangle$$

wobei $x^0 \equiv -i\tilde x^0 \Leftrightarrow \tilde x^0 \equiv i x^0 \in \mathbb{R}$, $y^0 \equiv -i\tilde y^0$, $\tilde y^0 \equiv i y^0 \in \mathbb{R}$

„Euklidische Green-Funktion" bzw. „Schwinger-Propagator".

Die mit Stern markierten Funktionen sind für uns die wichtigsten. Wir zeigen zuerst, dass $g(x,y)$ tatsächlich nichttrivial ist, und finden dann die Beziehungen zwischen den drei $*$-Funktionen.

$$\varrho(x,y) = \langle 0| \tfrac{1}{2} [\phi(x),\phi(y)] |0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\vec p,\vec q} \langle 0|\left[\hat a_{\vec p} e^{-ip\cdot x} + \hat a^\dagger_{\vec p} e^{ip\cdot x} \, , \, \hat a_{\vec q} e^{-iq\cdot y} + \hat a^\dagger_{\vec q} e^{iq\cdot y}\right]|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\vec p,\vec q} \langle 0| [\hat a_{\vec p}, \hat a^\dagger_{\vec q}] e^{iq\cdot y - ip\cdot x} + [\hat a^\dagger_{\vec p}, \hat a_{\vec q}] e^{ip\cdot x - iq\cdot y} |0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p}} \left\{ e^{iE_{\vec p}(y^0-x^0) + i\vec p\cdot(\vec x-\vec y)} - e^{iE_{\vec p}(x^0-y^0) + i\vec p\cdot(\vec y-\vec x)} \right\}$$

$\vec p \to -\vec p$ im zweiten Teil

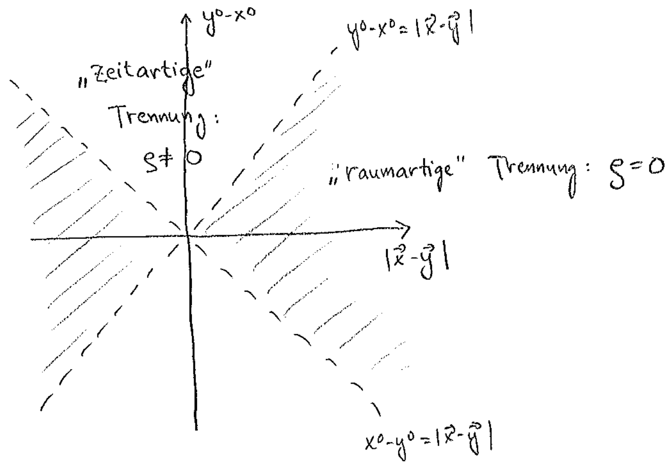
$$= \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p}} e^{i\vec p\cdot(\vec x-\vec y)} \cdot \frac{e^{iE_{\vec p}(y^0-x^0)} - e^{-iE_{\vec p}(y^0-x^0)}}{2}$$

Fazit:

* für $x^0 = y^0$ ist $\varrho(x,y) = 0$.
* im Allgemeinen aber $\varrho(x,y) \neq 0$.
* insbesondere:

$$\frac{\partial}{\partial y^0}\varrho(x,y)\Big|_{x^0=y^0} = \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{2E_{\vec p}}\cdot e^{i\vec p\cdot(\vec x-\vec y)} \cdot \frac{2iE_{\vec p}}{2} = \frac{i}{2}\delta^{(3)}(\vec x-\vec y).$$

* von Kausalität her erwarten wir eigentlich [Beweis möglich]:



— o —

Notabene: $\varrho(x,y)$ lässt sich umschreiben in

$$\varrho(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\cdot e^{ip^0(y^0-x^0) - i\vec p\cdot(\vec y-\vec x)} \left\{ \frac{\pi}{2E_{\vec p}} \left[\delta(p^0-E_{\vec p}) - \delta(p^0+E_{\vec p}) \right] \right\}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\cdot e^{ip\cdot(y-x)} \left\{ \frac{\pi}{2p^0} \left[\delta(p^0-E_{\vec p}) + \delta(p^0+E_{\vec p}) \right] \right\}$$

Wir nennen $\{\dots\}$ die Spektralfunktion.

Bestimmen wir dann $G_F(x,y)$.

$$\langle 0 | \hat\phi(x)\hat\phi(y) | 0 \rangle = \int_{\vec p, \vec q} \langle 0 | \left(\hat a_{\vec p} e^{-ip\cdot x} + \hat a^\dagger_{\vec p} e^{ip\cdot x} \right)\left(\hat a_{\vec q} e^{-iq\cdot y} + \hat a^\dagger_{\vec q} e^{iq\cdot y} \right) | 0 \rangle$$

$$= \int_{\vec p, \vec q} \langle 0 | \hat a_{\vec p} \hat a^\dagger_{\vec q} \, e^{iq\cdot y - ip\cdot x} | 0 \rangle$$

$$= \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3 2E_{\vec p}} \, e^{iE_{\vec p}(y^0 - x^0) - i\vec p\cdot(\vec y - \vec x)}$$

$$\Rightarrow \quad G_F(x,y) = \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3 2E_{\vec p}} \left\{ \Theta(x^0 - y^0)\, e^{iE_{\vec p}(y^0 - x^0)} + \Theta(y^0 - x^0)\, e^{iE_{\vec p}(x^0 - y^0)} \right\} e^{-i\vec p\cdot(\vec y - \vec x)} .$$

Bemerkung: $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik\tau}}{k^2 - E^2 + i\varepsilon} = -\frac{i}{2E} \left\{ \Theta(-\tau) e^{iE\tau} + \Theta(\tau) e^{-iE\tau} \right\}$$ [Aufgabe 5.1]

Das heisst,

$$G_F(x,y) = i \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec p\cdot(\vec y - \vec x)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(y^0 - x^0)}}{k^2 - E_{\vec p}^2 + i0^+}$$

$$\overset{\text{Substitution } k \to p^0}{=} \underline{\underline{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i0^+} \cdot e^{ip\cdot(y-x)}}} \quad , \text{ wo } \quad p^2 \equiv (p^0)^2 - \vec p^2 .$$

Letztendlich $G_E(\tilde x, \tilde y)$:

$$G_E(\tilde x, \tilde y) = \int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3 2E_{\vec p}} \left\{ \Theta(\tilde x^0 - \tilde y^0)\, e^{+E_{\vec p}(\tilde y^0 - \tilde x^0)} + \Theta(\tilde y^0 - \tilde x^0)\, e^{E_{\vec p}(\tilde x^0 - \tilde y^0)} \right\} e^{-i\vec p\cdot(\vec y - \vec x)}$$

Bemerkung: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde k}{2\pi} \frac{e^{i\tilde k\tau}}{\tilde k^2 + E^2} = \frac{1}{2E} \left\{ \Theta(-\tau) e^{E\tau} + \Theta(\tau) e^{-E\tau} \right\}$$ [Aufgabe 5.1]

$$\Rightarrow \quad G_E(\tilde x, \tilde y) = \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{(\tilde p^0)^2 + \vec p^2 + m^2} \, e^{i\tilde p^0(\tilde y^0 - \tilde x^0) - i\vec p\cdot(\vec y - \vec x)} \quad ; \quad P \equiv (\tilde p^0, \vec p)$$

$$\overset{\text{Substitution } \vec p \to -\vec p}{=} \underline{\underline{\int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{1}{P^2 + m^2} \, e^{i\tilde p^0(\tilde y^0 - \tilde x^0) + i\vec p\cdot(\vec y - \vec x)}}} \quad ; \quad P^2 \equiv (\tilde p^0)^2 + (\vec p)^2$$

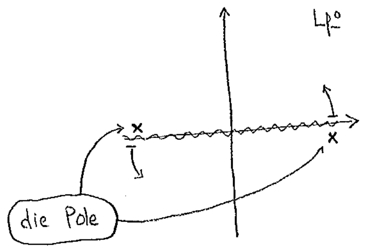
Fazit :

1. Der „einfachste" Propagator ist der euklidische Schwinger-Propagator: keine Minuszeichen oder Imaginärelemente.

   Wie wir später sehen werden, ist der wichtigste für uns jedoch der Feynman-Propagator, der im Minkowski-Raum definiert ist.

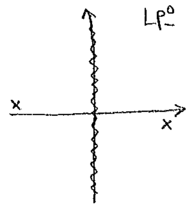
2. Diese zwei können mit einer Wick-Drehung (analytische Fortsetzung) ineinander umgewandelt werden:

$$G_F(x,y) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \, \frac{i}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i0^+} \, e^{ip^0(y^0-x^0) - i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}$$



$\Rightarrow$

S.13: $i y^0 = \tilde{y}^0$
$p^0 \equiv i\tilde{p}^0$
$dp^0 = i\, d\tilde{p}^0$



$$G_E(\tilde{x},\tilde{y}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\tilde{p}^0}{2\pi} \, \frac{1}{(\tilde{p}^0)^2 + E_{\vec{p}}^2} \, e^{i\tilde{p}^0(\tilde{y}^0-\tilde{x}^0) - i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}$$

3. Der Feynman-Propagator erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung für $x \neq y$:

$$\left[\partial_x^\mu \partial_{x\mu} + m^2\right] G_F(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \, \frac{i\left(-(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2\right)}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i0^+} \, e^{ip\cdot(y-x)}$$

$$= -i\,\delta^{(4)}(y-x) \, .$$

4. Die Spektralfunktion hat auch eine bestimmte Beziehung zw. G_F und G_E [Aufgabe 5.2].

——— o ———