1.3 Kanonische Quantisierung eines freien Skalarfeldes

Anfangspunkt:

Seite 3: $$H = \int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2}\left[\pi(x^0,\vec{x})\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[\partial_i\phi(x^0,\vec{x})\right]^2 + \frac{1}{2}m^2\left[\phi(x^0,\vec{x})\right]^2 \right\},$$

$$\pi(x^0,\vec{x}) = \partial_0\phi(x^0,\vec{x}).$$

Jetzt also drei Schritte, wie für ein klassisches Teilchen:

(i) $\phi \to \hat{\phi}$, $\pi \to \hat{\pi}$, $H \to \hat{H}$.

(ii) "kanonische" Variablen werden durch gleichzeitige Vertauschungsrelationen „normiert":

$$[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{\phi}(x^0,\vec{y})] = [\hat{\pi}(x^0,\vec{x}), \hat{\pi}(x^0,\vec{y})] \equiv 0,$$

$$[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{\pi}(x^0,\vec{y})] \equiv i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

(iii) die Dynamik folgt aus den Heisenberg-Gleichungen:

$$i\partial_0\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) \equiv [\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{H}],$$

$$i\partial_0\hat{\pi}(x^0,\vec{x}) \equiv [\hat{\pi}(x^0,\vec{x}), \hat{H}].$$

Wir schreiben (nach partieller Integration)

$$\hat{H} = \int d^3\vec{y} \left\{ \frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}\hat{\phi}\left[-\vec{\nabla}^2 + m^2\right]\hat{\phi} \right\},$$

und erhalten [Übung]

$$[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{H}] = \int d^3\vec{y}\; \hat{\pi}(x^0,\vec{y})\,[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}), \hat{\pi}(x^0,\vec{y})] = i\,\hat{\pi}(x^0,\vec{x}),$$

$$[\hat{\pi}(x^0,\vec{x}), \hat{H}] = \int d^3\vec{y}\; [\hat{\pi}(x^0,\vec{x}), \hat{\phi}(x^0,\vec{y})]\,(-\vec{\nabla}^2+m^2)\,\hat{\phi}(x^0,\vec{y})$$

$$= -i\,(-\vec{\nabla}^2+m^2)\,\hat{\phi}(x^0,\vec{x}).$$

Damit ist

$$\partial_0^2\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = \partial_0\hat{\pi}(x^0,\vec{x}) = (\vec{\nabla}^2-m^2)\,\hat{\phi}(x^0,\vec{x})$$

$$\Longleftrightarrow \left[\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2\right]\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = 0$$

$\Longrightarrow$ $\hat{\phi}(x^0,\vec{x})$ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung!

Also ist wieder die quantisierte Zeitentwicklung der klassischen äquivalent.

Die Klein-Gordon-Gleichung kann mit Hilfe von ebene Wellen gelöst werden.

Ansatz: $\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = \hat{N}(p)\cdot e^{-ip_\mu x^\mu}$

$$\Rightarrow \left(-p_0^2+\vec{p}^{\,2}+m^2\right)\hat{N}(p) = 0 \quad ; \quad \text{Sei } E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2} \Rightarrow p_0 = \pm E_{\vec{p}} \,.$$

Eine allgemeine Lösung ist eine Linearkombination ebener Wellen:

$$\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = \int d^3\vec{p}\,\left[\hat{N}_+(\vec{p})\,e^{-iE_{\vec{p}}x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{N}_-(\vec{p})\,e^{iE_{\vec{p}}x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right]$$

$$\overset{\left\{\begin{array}{l}\vec{p}\to-\vec{p} \text{ im zweiten Teil}\\ p\equiv(E_{\vec{p}},\vec{p})\end{array}\right.}{=} \int d^3\vec{p}\,\left[\hat{N}_+(\vec{p})\,e^{-ip\cdot x} + \hat{N}_-(-\vec{p})\,e^{ip\cdot x}\right] \Bigg| \; p\cdot x \equiv p^\mu x_\mu = p_\mu x^\mu \; ; \; p^0 \equiv E_{\vec{p}} \,.$$

Wir schreiben jetzt:

$$\hat{N}_+(\vec{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}}}\,\hat{a}_{\vec{p}} \,,$$

$$\hat{N}_-(\vec{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}}}\,\hat{a}^+_{\vec{p}} \,.$$

Um noch $\left[\hat{\phi}(x^0,\vec{x}),\,\partial_0\hat{\phi}(x^0,\vec{y})\right] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$ zu respektieren, müssen $\hat{a}_{\vec{p}}$, $\hat{a}^+_{\vec{p}}$ bestimmte Vertauschungsrelationen erfüllen.

Behauptung:

$$\left[\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}_{\vec{q}}\right] = \left[\hat{a}^+_{\vec{p}},\hat{a}^+_{\vec{q}}\right] = 0 \,,$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}^+_{\vec{q}}\right] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}) \,.$$

Beweis:

$$\hat{\phi}(x^0,\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}}}\left[\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^+_{\vec{p}}\,e^{ip\cdot x}\right],$$

$$\partial_0\hat{\phi}(y^0,\vec{y}) = \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{\vec{q}}}}\left[-iE_{\vec{q}}\,\hat{a}_{\vec{q}}\,e^{-iq\cdot y} + iE_{\vec{q}}\,\hat{a}^+_{\vec{q}}\,e^{iq\cdot y}\right].$$

$$\Rightarrow \left[\phi(x),\,\partial_0\phi(y)\right] = \int_{\vec{p},\vec{q}} \left\{ iE_{\vec{q}}\,\underbrace{\left[\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}^+_{\vec{q}}\right]}_{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})}e^{-ip\cdot x+iq\cdot y} - iE_{\vec{q}}\,\underbrace{\left[\hat{a}^+_{\vec{p}},\hat{a}_{\vec{q}}\right]}_{-\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})}e^{ip\cdot x-iq\cdot y}\right\}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}}\cdot iE_{\vec{p}}\cdot\left\{e^{iE_{\vec{p}}(y^0-x^0)+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)+i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}\right\}$$

$$\overset{x^0=y^0}{=} i\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \quad \square \,.$$

Setzen wir $\hat{\phi} = \overbrace{\int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p}}}}^{\equiv \int_{\vec p}} \left[\hat{a}_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{+}_{\vec p}\, e^{ip\cdot x} \right]$ in $\hat{H}$ ein, erhalten wir

$$\hat{H} = \int_{\vec x} \left\{ \tfrac{1}{2}\partial_0\hat\phi\,\partial_0\hat\phi + \tfrac{1}{2}\partial_i\hat\phi\,\partial_i\hat\phi + \tfrac{1}{2}m^2\hat\phi\hat\phi \right\}.$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{2}\int_{\vec x}\int_{\vec p}\int_{\vec q} \Big\{ & \left[-iE_{\vec p}\,\hat a_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} + iE_{\vec p}\,\hat a^{+}_{\vec p}\, e^{ip\cdot x}\right]\left[-iE_{\vec q}\,\hat a_{\vec q}\, e^{-iq\cdot x} + iE_{\vec q}\,\hat a^{+}_{\vec q}\, e^{iq\cdot x}\right] \\
&+ \left[ip_i\,\hat a_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} - ip_i\,\hat a^{+}_{\vec p}\, e^{ip\cdot x}\right]\left[iq_i\,\hat a_{\vec q}\, e^{-iq\cdot x} - iq_i\,\hat a^{+}_{\vec q}\, e^{iq\cdot x}\right] \\
&+ m^2 \left[\hat a_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} + \hat a^{+}_{\vec p}\, e^{ip\cdot x}\right]\left[\hat a_{\vec q}\, e^{-iq\cdot x} + \hat a^{+}_{\vec q}\, e^{iq\cdot x}\right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{2}\int_{\vec x}\int_{\vec p}\int_{\vec q} \Big\{ & \left[-E_{\vec p}E_{\vec q} - \vec p\cdot\vec q + m^2\right]\hat a_{\vec p}\hat a_{\vec q}\, e^{-iE_{\vec p}x^0 - iE_{\vec q}x^0 + i(\vec p+\vec q)\cdot\vec x} \\
&+ \left[E_{\vec p}E_{\vec q} + \vec p\cdot\vec q + m^2\right]\hat a_{\vec p}\hat a^{+}_{\vec q}\, e^{-iE_{\vec p}x^0 + iE_{\vec q}x^0 + i(\vec p-\vec q)\cdot\vec x} \\
&+ \left[E_{\vec p}E_{\vec q} + \vec p\cdot\vec q + m^2\right]\hat a^{+}_{\vec p}\hat a_{\vec q}\, e^{iE_{\vec p}x^0 - iE_{\vec q}x^0 - i(\vec p-\vec q)\cdot\vec x} \\
&+ \left[-E_{\vec p}E_{\vec q} - \vec p\cdot\vec q + m^2\right]\hat a^{+}_{\vec p}\hat a^{+}_{\vec q}\, e^{iE_{\vec p}x^0 + iE_{\vec q}x^0 - i(\vec p+\vec q)\cdot\vec x} \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec p}{(2\pi)^3\, 2E_{\vec p}} \Big\{ & (2\pi)^3 \underbrace{\left[-E_{\vec p}^2 + \vec p^{\,2} + m^2\right]}_{0}\hat a_{\vec p}\hat a_{-\vec p}\, e^{-2iE_{\vec p}x^0} \\
&+ (2\pi)^3 \left[E_{\vec p}^2 + \vec p^{\,2} + m^2\right]\hat a_{\vec p}\hat a^{+}_{\vec p} \\
&+ (2\pi)^3 \left[E_{\vec p}^2 + \vec p^{\,2} + m^2\right]\hat a^{+}_{\vec p}\hat a_{\vec p} \\
&+ (2\pi)^3 \underbrace{\left[-E_{\vec p}^2 + \vec p^{\,2} + m^2\right]}_{0}\hat a^{+}_{\vec p}\hat a^{+}_{-\vec p}\, e^{2iE_{\vec p}x^0} \Big\}
\end{aligned}$$

$$= \int d^3\vec p\; E_{\vec p}\; \frac{1}{2}\left(\hat a_{\vec p}\hat a^{+}_{\vec p} + \hat a^{+}_{\vec p}\hat a_{\vec p}\right).$$

Dies ist offensichtlich ein hermitescher Operator $\Rightarrow$ Eigenwerte sind reell!

Vertauschungsrelationen ($[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$):

$$[\hat H, \hat a_{\vec k}] = \int d^3\vec p\; E_{\vec p}\, \frac{1}{2}\Big\{ \hat a_{\vec p}\underbrace{[\hat a^{+}_{\vec p}, \hat a_{\vec k}]}_{-\delta^{(3)}(\vec p-\vec k)} + \underbrace{[\hat a_{\vec p}, \hat a_{\vec k}]}_{0}\hat a^{+}_{\vec p} + \hat a^{+}_{\vec p}\underbrace{[\hat a_{\vec p}, \hat a_{\vec k}]}_{0} + \underbrace{[\hat a^{+}_{\vec p}, \hat a_{\vec k}]}_{-\delta^{(3)}(\vec p-\vec k)}\hat a_{\vec p} \Big\}$$

$$= -E_{\vec k}\,\hat a_{\vec k}$$

$$[\hat H, \hat a^{+}_{\vec k}] = \int d^3\vec p\; E_{\vec p}\, \frac{1}{2}\Big\{ \hat a_{\vec p}\underbrace{[\hat a^{+}_{\vec p}, \hat a^{+}_{\vec k}]}_{0} + \underbrace{[\hat a_{\vec p}, \hat a^{+}_{\vec k}]}_{\delta^{(3)}(\vec p-\vec k)}\hat a^{+}_{\vec p} + \hat a^{+}_{\vec p}\underbrace{[\hat a_{\vec p}, \hat a^{+}_{\vec k}]}_{\delta^{(3)}(\vec p-\vec k)} + \underbrace{[\hat a^{+}_{\vec p}, \hat a^{+}_{\vec k}]}_{0}\hat a_{\vec p} \Big\}$$

$$= +E_{\vec k}\,\hat a^{+}_{\vec k}.$$

Energie - Eigenzustände

Sei $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$. Dann ist:

$$\hat{H}\hat{a}_{\vec{k}}|\psi\rangle = \left([\hat{H},\hat{a}_{\vec{k}}] + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{H}\right)|\psi\rangle = \left(-E_{\vec{k}} + E_\psi\right)\hat{a}_{\vec{k}}|\psi\rangle$$

$\Rightarrow$ $\hat{a}_{\vec{k}}|\psi\rangle$ ist ein Eigenzustand mit Energie $E_\psi - E_{\vec{k}}$

analog: $\hat{a}^+_{\vec{k}}|\psi\rangle$ —— " —— $E_\psi + E_{\vec{k}}$.

Wie für den harmonischen Oszillator, nehmen wir jetzt an, dass es einen Zustand $|0\rangle$, das Vakuum, gibt, mit minimaler Energie: $\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \;\forall \vec{k}$.

Die anderen Zustände sind dann von der Form

$$\hat{a}^+_{\vec{k}}|0\rangle \equiv |\vec{k}\rangle \qquad \text{(Einteilchenzustände)}$$

$$\hat{a}^+_{\vec{k}_1}\hat{a}^+_{\vec{k}_2}\cdots\hat{a}^+_{\vec{k}_n}|0\rangle \equiv |\vec{k}_1,\vec{k}_2,\dots,\vec{k}_n\rangle \qquad \text{(Mehrteilchenzustände)}$$

Sie bilden einen Fock-Raum.

Normierung:

$$\langle\vec{k}'|\vec{k}\rangle = \langle 0|\hat{a}_{\vec{k}'}\hat{a}^+_{\vec{k}}|0\rangle$$

$$= \langle 0|\left\{[\hat{a}_{\vec{k}'},\hat{a}^+_{\vec{k}}] + \hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\right\}|0\rangle = \delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k}) \qquad \text{usw.}$$

—— o ——

Frage: Was ist die Energie des Vakuumzustandes?

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \int d^3\vec{p}\, E_{\vec{p}}\, \frac{1}{2}\, \langle 0|\underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^+_{\vec{p}}}_{\delta^{(3)}(\vec{0}) + \hat{a}^+_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}} + \hat{a}^+_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = \int d^3\vec{p}\, E_{\vec{p}}\, \frac{1}{2}\, \delta^{(3)}(\vec{0}) = \infty \,!$$

Eigentlich ist dies kein Problem, weil $\langle 0|\hat{H}|0\rangle$ in der Teilchenphysik (ohne Schwerkraft) keine Messgrösse ist. Jedoch führt man oft einen Trick ein, der das Problem „löst": „Normalordnung".

$$:\hat{O}: \;\equiv\; \text{„}\hat{O} \text{ mit allen } \hat{a}_{\vec{p}}\text{'s nach rechts verschoben"},$$

$$:\hat{H}: \;=\; \int d^3\vec{p}\, E_{\vec{p}}\, \hat{a}^+_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}\,.$$

Dann ist $\langle 0|:\hat{H}:|0\rangle = 0$.

—— o ——