

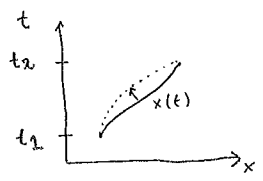
# 1. Kanonische Quantisierung von Skalarfeldern

## 1.1. Klassische Feldtheorie im Lagrange- und Hamilton-Formalismus

Fangen wir mit einem klassischen Teilchen an.

- \* Kinetische Energie  $\equiv T \equiv \frac{1}{2} m \dot{x}^2$
- \* Potentielle Energie  $\equiv V = V(x)$
- \* Lagrange-Funktion  $\equiv L \equiv T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) = L(x, \dot{x})$
- \* Wirkung  $\equiv S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(x, \dot{x})$

Das Prinzip der minimalen Wirkung besagt, dass das Teilchen dem Pfad  $x(t)$  folgt, der die Wirkung minimiert. Also müssen wir variieren:



$$x(t) \rightarrow x'(t) = x(t) + \delta x(t)$$

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x})$$

$$\approx S + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right\} \quad \left| \quad \delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \delta x(t) \right.$$

$$= S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right\} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \delta x$$

Verschwimmt wegen  $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

Muss für alle  $\delta x$  verschwinden!

$$\Rightarrow \text{Euler-Lagrange-Gleichung: } \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{OK!}$$

Hamilton-Formalismus folgt aus diesem Lagrange-Formalismus:

- \* Kanonischer Impuls  $\equiv p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$
  - \* Hamilton-Funktion  $\equiv H \equiv p \dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + V(x) = H(x, p)$
  - \* Hamilton-Gleichungen:  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$
- $$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = m \ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{OK!}$$

Also sind sowohl der Lagrange- als auch der Hamilton-Formalismus dem Newtonschen äquivalent. Jedoch lassen die beiden sich leichter quantisieren als der Newton-Formalismus.

Betrachten wir jetzt klassische Felder.

Freiheitsgrad:  $x \rightarrow \phi$   
 Koordinaten:  $t \rightarrow x^\mu \equiv (x^0, x^i) \equiv (ct, \vec{x})$

Relativistische Notation:  $\eta^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \equiv \eta_{\mu\nu} ; x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu ; x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$

Einstein-Konvention:  $\eta_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\nu$  usw.

$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} ; \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

Verallgemeinern wir die Definitionen der klassischen Mechanik zu diesem Fall:

\* Lagrange - Dichte  $\equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

\* Lagrange - Funktion  $\equiv L[\phi, \partial_\mu \phi] \equiv \int_V d^3\vec{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

\* Wirkung  $\equiv S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L[\phi, \partial_\mu \phi]$

Das Prinzip der minimalen Wirkung bleibt unverändert. Sei  $\Omega = [t_1, t_2] \times V$  das Vierervolumen.

$\Rightarrow S' = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi')$

$\approx S + \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right\} ; \delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi' - \partial_\mu \phi = \partial_\mu (\phi' - \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$

$= S + \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right\} + \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \right] \right\} \delta \phi$

$= S + \int_{\partial \Omega} dS n_\mu \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right\} + \dots$

$\uparrow$  verschwindet falls  $\delta \phi = 0$  an der Oberfläche

$\Rightarrow$  die Euler-Lagrange-Gleichung:  $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \right] = 0$

Zum Beispiel:

$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$

$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = -m^2 \phi$

$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$

$\Rightarrow [\partial^\mu \partial_\mu + m^2] \phi = 0$

Klein-Gordon-Gleichung!

Wie gehen wir jetzt über zum Hamilton — Formalismus?

\* Kanonischer Impuls  $\equiv \pi(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}(x)} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi = \partial_0 \phi .$


\* Hamilton — Dichte folgt durch eine Legendre — Transformation, wie schon für ein Teilchen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\phi, \pi) &= \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\partial_i \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 . \end{aligned}$$


\* Die Hamilton — Gleichungen lassen sich auch verallgemeinern .

— o —

Ein wichtiger Vorteil des Lagrange — Formalismus ist, dass die Beziehung von Erhaltungsgrößen und Symmetrien bzw. Invarianzen durch das Noether — Theorem [ Emmy Noether 1918 ] im wesentlichen erklärt wird.

Die Euler — Lagrange — Gleichung folgte aus  $\delta S = 0$  indem wir  $\phi$  mit fixierten Randbedingungen auf  $\delta \Omega$  variierten. 

Es gibt aber auch andere Arten von Transformationen, wo  $S$ , oder sogar der lokale Beitrag  $\delta S$  zum ganzen  $S$ , invariant bleibt. Zum Beispiel:

- \* Raumzeit — bzw. Koordinatentransformationen wie Translation. [d.h., die Bahn eines Teilchens hat die gleiche Form, unabhängig davon, wann wir es in Bewegung setzen.] 
- \* "Inhere" Symmetrien, indem wir ähnliche Felder gegeneinander austauschen. [d.h., die Lösung von  $\delta S = 0$  ist nicht eindeutig.]

Zum Beispiel: Invarianz in Her — Translation  $\Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ,  
wo  $T^{\mu\nu} \equiv$  Energieimpulstensor .

Insbesondere :  $T^{00} = \mathcal{H}$  [ Aufgabe 1.1 ]

Eine allgemeine Herleitung des Noether — Theorems folgt auf der nächsten Seite, und spezifische Beispiele sind in den Übungsaufgaben zu betrachten.

— o —

# Appendix: Herleitung des Noether-Theorems

Betrachten wir eine gleichzeitige Transformation der Raumzeitkoordinaten  $[x^\mu \rightarrow x'^\mu \equiv x^\mu + \delta x^\mu]$  und der Felder  $[\phi^a(x) \rightarrow \phi'^a(x') \equiv \phi^a(x) + \delta \phi^a(x)]$ . Die Transformation sei parametrisiert durch  $\delta \omega^i$ , die  $\delta x^\mu$  und  $\delta \phi^a(x)$  mittels Generatoren bestimmen:

$$\delta x^\mu \equiv X^\mu_i(x) \delta \omega^i,$$

$$\delta \phi^a(x) \equiv \Phi_i^a(x) \delta \omega^i.$$

Wir nehmen an, dass für die Wirkung  $\Delta S$  in einem kleinen Volumenelement  $\Delta$  gilt:

$$\Delta S' \equiv \int_{\Delta} d^4 x' \mathcal{L}(\phi'^a(x'), \partial'_\mu \phi'^a(x')) = \Delta S + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2,$$

falls  $\delta \omega^i$  ortsunabhängig sind und  $\phi^a(x)$  die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen.

Die Variationen:

$$* \quad d^4 x' = \det \left[ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right] d^4 x = \det \left[ \delta^\mu_\nu + \partial_\nu (X^\mu_i \delta \omega^i) \right] d^4 x$$

$$\stackrel{\text{det}[1+A] = 1 + \text{Sp}[A] + \mathcal{O}(A^2)}{=} [1 + \partial_\mu (X^\mu_i \delta \omega^i)] d^4 x + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2.$$

$$* \quad \mathcal{L}(\phi'^a, \partial'_\mu \phi'^a) = \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^a} \delta \phi^a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \delta (\partial_\mu \phi^a) + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2$$

$$\text{Hier } \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^a} = \partial_\mu \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \right] \quad \text{und} \quad \delta (\partial_\mu \phi^a) = \partial'_\mu \phi'^a - \partial_\mu \phi^a = \frac{\delta x^\nu}{\delta x'^\mu} \partial_\nu \phi'^a - \partial_\mu \phi^a$$

$$\stackrel{x^\nu = x'^\nu - X^\nu_i \delta \omega^i}{=} [\delta^\nu_\mu - \partial_\mu (X^\nu_i \delta \omega^i)] \partial_\nu \phi'^a - \partial_\mu \phi^a + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2$$

$$= \partial_\mu (\phi'^a - \phi^a) - \partial_\mu (X^\nu_i \delta \omega^i) \partial_\nu \phi^a + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2$$

$$= \partial_\mu (\Phi_i^a \delta \omega^i) - \partial_\mu (X^\nu_i \delta \omega^i) \partial_\nu \phi^a + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') = \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a) + \partial_\mu \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \right] \Phi_i^a \delta \omega^i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} [\partial_\mu (\Phi_i^a \delta \omega^i) - \partial_\mu (X^\nu_i \delta \omega^i) \partial_\nu \phi^a] + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2$$

Damit wird:

$$\Delta S' = \Delta S + \int_{\Delta} d^4 x \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \right] \Phi_i^a \delta \omega^i + \left[ \mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \partial_\nu \phi^a \right] \partial_\mu (X^\nu_i \delta \omega^i) \right\} + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2$$

Wir bemerken, dass:

$$\partial_\mu \left[ \mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \partial_\nu \phi^a \right] = \partial_\nu \mathcal{L} - \partial_\nu \phi^a \partial_\mu \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \right] - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \partial_\mu \partial_\nu \phi^a = 0!$$

$$\underbrace{\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^a} \partial_\nu \phi^a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \partial_\mu \partial_\nu \phi^a}_{\uparrow} \quad \underbrace{\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^a}}_{\uparrow}$$

Wir definieren den Noether-Strom  $\equiv j^{\mu}_i \equiv \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \right] \Phi_i^a + \left[ \mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \partial_\nu \phi^a \right] X^\nu_i$

Dann gilt:

$$\Delta S' = \Delta S + \int_{\Delta} d^4 x \partial_\mu \{ j^{\mu}_i \delta \omega^i \} + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2 = \Delta S + \int_{\Delta} d^4 x \{ \partial_\mu j^{\mu}_i \} \delta \omega^i + \mathcal{O}(\delta \omega^i)^2$$

Diese Gleichung gilt unabhängig von  $\Delta$  und  $\delta \omega^i \Rightarrow$

$$\boxed{\partial_\mu j^{\mu}_i = 0 \quad \forall i}$$