Übungen zu MMP II — Blatt Nr. 12

[Tutorium 15.5.; Abgabe 22.5.]

Aufgabe 1: Eindimensionale Fourier-Transformation. Betrachtet wird die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

(a) Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ (4 Punkte). [Antwort: $\frac{\sin(ak)}{ak}$.]

(b) Überprüfen Sie den Wert $\tilde{f}(0)$ mittels direkter Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)$ (2 Punkte).

Aufgabe 2: Eindimensionale Fourier-Transformation. Betrachtet wird die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - a|x|), & |x| < \frac{1}{a} \\ 0, & |x| > \frac{1}{a} \end{cases}$$

(a) Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ (4 Punkte). [Antwort: $\frac{4a^2}{k^2} \sin^2\left(\frac{k}{2a}\right)$.]

(b) Überprüfen Sie den Wert $\tilde{f}(0)$ mittels direkter Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)$ (2 Punkte).

Aufgabe 3: Inverse Fourier–Transformation. Im Vorlesungsskript wurde die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k) = \frac{2\Delta^{-1}}{k^2 + \Delta^{-2}}$ der Funktion $f(x) = e^{-|x|/\Delta}$ bestimmt. Verwenden Sie diese Information, um die folgenden Integrale zu berechnen:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, \frac{\cos(a\,z)}{b^2 + z^2}$ (3 Punkte); (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z\, \frac{\sin(c\,z)}{z}$ (3 Punkte).

Aufgabe 4: Dreidimensionale Fourier–Transformation. Das „Coulomb-Potential" der starken Wechselwirkung ist der Form

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\alpha\, e^{-m_\pi r}}{4\pi r}\,, \quad r = |\vec{r}\,|\,,$$

wobei m_π die Pion-Masse bezeichnet (in bestimmten Einheiten). Ermitteln Sie die entsprechende Fourier-Transformierte (6 Punkte).

Hinweise, die auf dem Prüfungsblatt gegeben werden:

$$\nabla = \tfrac{\vec{e}_u}{h_u}\partial_u + \tfrac{\vec{e}_v}{h_v}\partial_v + \tfrac{\vec{e}_w}{h_w}\partial_w \qquad \int_S \mathrm{d}\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{E} = \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial_u(h_v h_w E_u) + \partial_v(h_w h_u E_v) + \partial_w(h_u h_v E_w)}{h_u h_v h_w} \qquad \int_V \mathrm{d}V\, \nabla\cdot\vec{E} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{E} \qquad c_n = \tfrac{1}{L}\int_P \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n x}{L}}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\vec{e}_u & h_v\vec{e}_v & h_w\vec{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u E_u & h_v E_v & h_w E_w \end{vmatrix} \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad f(x) = \int \tfrac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \qquad \tilde{f}(k) = \int \mathrm{d}x\, f(x) e^{-ikx}$$

$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta)$ [Kugel]

$\vec{r} = (\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi,\, z)$ [Zylinder]

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \qquad \delta^{(d)}(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$