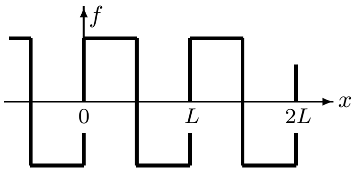
| Übungen zu MMP II | **Blatt Nr. 11** |
|---|---|

[ Tutorium 8.5., Abgabe 15.5. ]

**Aufgabe 1: Rechteckschwingung.**




(a) Ermitteln Sie die Sinus-Reihe der rechts skizzierten Funktion $f(x) = \left\{1,\ (x \,\mathsf{mod}\, L) \in (0, \frac{L}{2}); -1,\ (x \,\mathsf{mod}\, L) \in (\frac{L}{2}, L)\right\}$ (2 Punkte).
(b) Skizzieren Sie die Summe der ersten zwei Terme (2 Punkte).
(c) Im Skript werden verschiedene Darstellungen der Funktion $f(x) = x$, $0 < x \leq 1$ hergeleitet. Können Sie das Ergebnis aus (a) als Ableitung einer dieser Darstellungen reproduzieren (2 Punkte)?

**Aufgabe 2: Verlegung des Definitionsbereichs.** Eine Funktion $\phi(x)$, die im Intervall $x \in (a, a+L]$ definiert ist, wobei $a \in \mathbb{R}$ gilt, soll als Fourier-Reihe dargestellt werden.

(a) Ermitteln Sie die allgemeinen Ausdrücke der komplexen Fourier-Darstellung für den Fall, dass die periodische Fortsetzung die Periode $L$ aufweist (2 Punkte).

(b) Ermitteln Sie die entsprechende reelle (Sinus- und Kosinus-) Darstellung für den Fall $a = -L/2$ (2 Punkte).

(c) Welche Form einer Fourier-Reihe würden Sie bevorzugen, wenn es das Ziel wäre, eine Funktion mit den Randbedingungen $\phi(0) = \phi(\pi/2) = 0$ darzustellen (2 Punkte)?

**Aufgabe 3: Summierung von Reihen.** Betrachtet wird die Funktion $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$.

(a) Ermitteln Sie eine Darstellung von $f(x)$ als Kosinus-Reihe mit Periode $2\pi$ (bitte skizzieren!) (3 Punkte). [Antwort: $\pi^2/3 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$.]

(b) Benutzen Sie die Antwort, um die Summe $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ durchzuführen (3 Punkte). [Antwort: $\zeta(2) = \pi^2/6$.]

**Aufgabe 4: Unterschiedliche periodische Fortsetzungen.** Uns interessiert die Funktion $\sin(\pi t)$ im Definitionsbereich $t \in [0, 1]$.

(a) Ermitteln Sie eine Darstellung dieser Funktion als Fourier-Kosinus-Reihe (bitte skizzieren!) (3 Punkte). [Antwort: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=2,4,6,\ldots} \frac{\cos(n\pi t)}{n^2-1}$.]

(b) Wir wollen dieselbe Funktion durch ein Polynom approximieren, und zwar der Form $P(t) = a\,t(1-t)$. Ermitteln Sie eine Darstellung von $P(t)$ durch eine Sinus-Reihe. Wie würden Sie $a$ wählen, um eine sinnvolle Näherung von $\sin(\pi t)$ zu erhalten (3 Punkte)?