Übungen zu MMP II **Blatt Nr. 10**

[Tutorium 1.5., Abgabe 8.5.]

Aufgabe 1: Normalkoordinaten. Betrachtet wird ein System von vier harmonischen Oszillatoren, mit dem Potential

$$V(q_1,q_2,q_3,q_4) := \frac{1}{2}\omega^2\Big[(q_1-q_4)^2+(q_4-q_3)^2+(q_3-q_2)^2+(q_2-q_1)^2\Big]\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Kreisfrequenzen der unabhängigen „Normalschwingungen"(3 Punkte). [Antwort: $\{0,\sqrt{2}\omega,\sqrt{2}\omega,2\omega\}$.]

(b) Skizzieren Sie die Normalschwingungen in den ursprünglichen Koordinaten (3 Punkte).

Aufgabe 2: Summenregel für Normalfrequenzen ω_k. Ein System bestehe aus N „periodisch" gekoppelten harmonischen Oszillatoren, mit Potential

$$V := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\Big[\omega_0^2 q_j^2+\omega^2(q_{j+1}-q_j)^2\Big]_{q_{N+1}:=q_1}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die „Summenregel" $\sum_{k=1}^N \omega_k^2 = \mathrm{Sp}(M)$ gilt, wobei das Potential als „quadratische Form" ausgedrückt wurde, d.h. $V=\frac{1}{2}\,q^T M\,q$. Zeigen Sie auch, dass dieses im jetzigen Fall zur $\sum_{k=1}^N \omega_k^2 = N\,(\omega_0^2+2\omega^2)$ führt (2 Punkte).

(b) In der Vorlesung wurden die Normalfrequenzen $\omega_k^2=\omega_0^2+\Big(2\omega\sin\frac{\pi k}{N}\Big)^2$ hergeleitet. Verifizieren Sie, dass diese die Summenregel erfüllen (2 Punkte).

(c) Die „letzte" Feder sei abgeschnitten, d.h. q_1 und q_N abgekoppelt; das System ist dann keine Kette mehr sondern ein eindimensionaler „Kristall". Bestimmen Sie $\sum_{k=1}^N \omega_k^2$ in diesem Fall (2 Punkte). [Antwort: $N\,\omega_0^2+2(N-1)\,\omega^2$.]

Aufgabe 3: Der Limes $N\to\infty$. Überprüfen Sie, dass die „Fourier-Darstellung"

$$q_j(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\alpha\left\{f(\alpha)e^{-i[\omega(\alpha)t-\alpha j]}+f^*(\alpha)e^{i[\omega(\alpha)t-\alpha j]}\right\},\quad \omega(\alpha):=\sqrt{\omega_0^2+4\omega^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

für beliebiges, komplexes $f(\alpha)$ die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q}_j(t)=-\omega_0^2\,q_j(t)+\omega^2\big[q_{j+1}(t)-2q_j(t)+q_{j-1}(t)\big]$$

einer unendlichen Kette löst (6 Punkte).

Aufgabe 1: Lösung einer zeitabhängigen Differenzialgleichung. Betrachtet wird die Diffusionsgleichung $\partial_t T(t,\vec{r})=D\nabla^2 T(t,\vec{r})$ mit der Anfangsbedingung $T(0,\vec{r}):=T_0\sin(kx)$.

(a) Verifizieren Sie, dass die Lösung formal als $T(t,\vec{r})=\exp(tD\nabla^2)T(0,\vec{r})$ ausgedrückt werden kann, wobei $\exp$ durch ihre Reihenentwicklung definiert ist (2 Punkte).

(b) Ermitteln Sie die explizite Form der Lösung, und skizzieren Sie diese für $t=0$, $t=1/k^2D$ sowie $t\gg 1/k^2D$ (4 Punkte).