Übungen zu MMP II	**Blatt Nr. 7**

[Tutorium 3.4., Abgabe 10.4.]

Aufgabe 1: Volumenintegral über ein Paraboloid. Bestimmen Sie das Volumen (3 Punkte) und die Schwerpunktkoordinaten (3 Punkte) des Körpers, der von der Ebene $z = h$ und dem Paraboloid $x^2 + y^2 = zh$ eingeschlossen wird (bitte skizzieren!). [Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten. Antwort: $V = \pi h^3/2$, $\rho_0 = 0$, $z_0 = 2h/3$.]

Aufgabe 2: Schiefwinklige Koordinaten.

(a) Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Beziehung (2 Punkte):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, f(x-y)\, g(x+2y) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\, f(u) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v\, g(v)\ .$$

(b) Zeigen Sie, dass wenn neue Koordinaten als $u = x - y$, $v = x + 2y$ eingeführt werden, die neuen partiellen Ableitungen durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\ , \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

gegeben sind (2 Punkte).

(c) Verifizieren Sie letztendlich, dass der zweidimensionale Laplace-Operator in neuen Koordinaten als

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + 5\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

ausgedrückt werden kann (2 Punkte).

Aufgabe 3: Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten. Bestimmen Sie die Form von $\nabla \cdot \nabla$ in Zylinderkoordinaten. Tun Sie dies auf zwei Weisen: einmal mit Hilfe der allgemeinen Formeln der Vorlesung mit h_u, h_v, h_w usw (3 Punkte), einmal durch die direkte Ableitung des Nabla-Operators (3 Punkte). [Antwort: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.]

Aufgabe 4: Typisches Impulsintegral. Ein Volumenelement in kartesischen Koordinaten kann auch als $\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\vec{r}$ bezeichnet werden. Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Beziehung (6 Punkte):

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{q}\, \phi(|\vec{q}|, |\vec{k} - \vec{q}|) = \frac{2\pi}{k} \int_0^{\infty} \mathrm{d}q\, q \int_{|k-q|}^{k+q} \mathrm{d}x\, x\, \phi(q, x)\ , \quad k \equiv |\vec{k}|\ , \quad q \equiv |\vec{q}|\ .$$