Übungen zu MMP II	**Blatt Nr. 6**

[Tutorium 27.3., Abgabe 3.4.]

Aufgabe 1: Oberflächenintegral in kartesischen Koordinaten. Berechnen Sie das Integral

$$I = \frac{1}{3} \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{r} \,,$$

wobei S die Oberfläche eines Würfels mit Ecken bei $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, usw ist (bitte skizzieren!) (6 Punkte).

Aufgabe 2: Jacobi-Determinante. Bestimmen Sie, mittels eines Flächenintegrals, die von den Kurven $x = 0$, $y = 0$, $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eingeschlossene Fläche, indem Sie die Fläche durch die Koordinaten ρ und φ als $x = \rho\,\cos^3\!\varphi$, $y = \rho\,\sin^3\!\varphi$ parametrisieren (bitte skizzieren!) (6 Punkte). [Antwort: $3\pi a^2/32$.]

Aufgabe 3: Oberflächeninhalt. Die Kurve $y = f(x)$, $x_a \leq x \leq x_b$, drehe sich um die x-Achse. Wenn φ der Drehwinkel ist, können die Ortsvektoren der Oberfläche als

$$\vec{r} = (x, f(x)\cos\varphi, f(x)\sin\varphi)$$

parametrisiert werden. Zeigen Sie, dass der Oberflächeninhalt als

$$A = \int_S |\mathrm{d}\vec{A}| = 2\pi \int_{x_a}^{x_b} \mathrm{d}x\, f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

ausgedrückt werden kann (6 Punkte).

Aufgabe 4: Volumenintegral. Bestimmen Sie

$$I = \int_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\, \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \,,$$

wenn V das von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ eingeschlossene Tetraeder ist (bitte skizzieren!) (6 Punkte). [Antwort: $I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$.]