Übungen zu MMP II	**Blatt Nr. 5**

[Tutorium 20.3., Abgabe 27.3.]

Aufgabe 1: Linienintegral. Betrachtet werden Linienintegrale entlang der Parabel $y = 2x^2$ in der Ebene $z = 0$, zwischen den Punkten $P_1 = (0, 0, 0)$ und $P_2 = (1, 2, 0)$ (bitte skizzieren!). Ein Kraftfeld $\vec{F} := 3xy\,\vec{e}_x - y^2\,\vec{e}_y$ sei vorhanden.

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Parabel zwischen P_1 und P_2 (3 Punkte).
[Hinweis: $\int^x \mathrm{d}y\,\sqrt{1 + c^2\,y^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1 + c^2x^2} + \frac{1}{2c}\mathrm{arsinh}(cx)$.]

(b) Ermitteln Sie die „Arbeit“ $W := \int_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}$ (3 Punkte).

Aufgabe 2: Eine physikalische Anwendung von Linienintegralen. Sei $\vec{F} = \frac{mgR^2\vec{r}}{r^3}$, wobei $g \approx 9,8$ m/s^2 und $R \approx 6400$ km. Ein Körper mit Masse $m = 1$ kg wird vom $r = R$ nach $r = \infty$ geschossen. Ermitteln Sie die Arbeit $W := \int_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}$ (3 Punkte). [Hinweis: Sie können den Integrationsweg C frei wählen.]

Aufgabe 3: Ein konservatives Kraftfeld. Ein Vektorfeld $\vec{F}$ wird „konservativ“ genannt, falls es der Form $\vec{F} = \nabla\phi$ ist. In diesem Fall ist das Linienintegral $W := \int_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}$ unabhängig vom Integrationsweg. Sei jetzt $\vec{F} := x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$, $P_a := (0, 0, 0)$, $P_b := (1, 1, 0)$.

(a) Berechnen Sie W entlang der Geraden zwischen P_a und P_b (2 Punkte).

(b) Ein anderer Integrationsweg bestehe aus zwei Teilen, zuerst aus einer Geraden zwischen P_a und $P_c := (1, 0, 0)$, dann aus einer Geraden zwischen P_c und P_b (bitte skizzieren!). Bestimmen Sie den Wert von W entlang dieser Kurve (2 Punkte).

(c) Ermitteln Sie letztendlich eine Funktion ϕ mit der Eigenschaft $\vec{F} = \nabla\phi$, und verifizieren Sie die Gültigkeit der Beziehung $W = \phi(P_b) - \phi(P_a)$ (2 Punkte).

Aufgabe 4: Flächenintegral. Betrachtet wird ein Quadrant einer Ellipse, $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ (bitte skizzieren!).

(a) Bestimmen Sie die Fläche des Quadrants, $A := \int_B \mathrm{d}A$, sowohl indem Sie zuerst in die x-Richtung als auch zuerst in die y-Richtung integrieren (3 Punkte). [Antwort: $A = \frac{\pi ab}{4}$.]

(b) Die „Schwerpunktkoordinaten“ x_0, y_0 werden durch

$$x_0 := \frac{1}{A}\int_B \mathrm{d}A\,x\ , \quad y_0 := \frac{1}{A}\int_B \mathrm{d}A\,y$$

definiert. Bestimmen Sie diese (3 Punkte). [Antwort: $x_0 = \frac{4a}{3\pi}$, $y_0 = \frac{4b}{3\pi}$.]

(c) Ermitteln Sie ebenfalls die „Trägheitsmomente“ (3 Punkte)

$$J_{xx} := \int_B \mathrm{d}A\,(x - x_0)^2\ , \quad J_{yy} := \int_B \mathrm{d}A\,(y - y_0)^2\ , \quad J_{xy} := \int_B \mathrm{d}A\,(x - x_0)(y - y_0)\ .$$