Übungen zu MMP II	**Blatt Nr. 4**

[Tutorium 13.3., Abgabe 20.3.]

Aufgabe 1: Levi-Civita-Tensor.

(a) Zeigen Sie, dass $\epsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \times \vec{e}_k$ gilt, wenn die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine orthonormierte „rechtshändige" Basis bilden (2 Punkte).

(b) Verifizieren Sie mit Hilfe des ϵ-Tensors die Identität $\nabla \cdot \nabla \times \vec{j} = 0$ (2 Punkte).

(c) Verifizieren Sie mit Hilfe des ϵ-Tensors die Identität $\nabla \times \nabla\phi = 0$ (2 Punkte).

Aufgabe 2: Ableitungen von Produkten. Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Aussagen (jeweils 2 Punkte):

(a) $\nabla \times (\vec{E} \times \vec{B}) \ = \ \vec{E}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{E} - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{B}$;

(b) $\nabla(\vec{E} \cdot \vec{B}) \ = \ \vec{E} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{B}$;

(c) Das Kreuzprodukt zweier wirbelfreier Vektorfelder ist quellenfrei.

Aufgabe 3: Ableitungen von Raumkurven.

(a) Sei $\vec{r}(t)$ eine Raumkurve, $\vec{v}(t) := \mathrm{d}\vec{r}(t)/\mathrm{d}t$ der Geschwindigkeitsvektor, und $\vec{a}(t) := \mathrm{d}\vec{v}(t)/\mathrm{d}t$ der Beschleunigungsvektor. Wir bezeichnen auch $r := |\vec{r}\,|$, $v := |\vec{v}|$, $a := |\vec{a}|$, sowie $\vec{e}_r := \vec{r}/r$, $\vec{e}_v := \vec{v}/v$. Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Gleichungen (3 Punkte):

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \vec{e}_r \cdot \vec{v}\ , \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \vec{e}_v \cdot \vec{a}\ , \quad \vec{e}_v \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{e}_v}{\mathrm{d}t} = 0\ .$$

(b) Wir betrachten einen Massenpunkt in Drehbewegung (d.h. $r =$ const) in einer Ebene. Zeigen Sie, dass die Beschleunigung als

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_v - \frac{v^2}{r}\,\vec{e}_r$$

ausgedrückt werden kann (3 Punkte). [Hinweis: Schreiben Sie $\vec{v} = v\,\vec{e}_v$; zeigen Sie, dass $\mathrm{d}\vec{e}_v/\mathrm{d}t$ parallel zu $\vec{e}_r$ ist; und bestimmen Sie den Betrag von $\mathrm{d}\vec{e}_v/\mathrm{d}t$ ausgehend von der Gleichung $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_v = 0$.]

Aufgabe 4: Wellengleichungen. Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum lauten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0\ , \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \vec{0}\ , \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\ , \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = \vec{0}\ , \end{aligned}$$

wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die elektrischen und magnetischen Feldern bezeichnen, c die Lichtgeschwindigkeit ist, und $\dot{\vec{E}} := \partial_t \vec{E}$. Leiten Sie die folgenden „Wellengleichungen" her, indem Sie die Rotation aus der zweiten und vierten Gleichung nehmen (6 Punkte):

$$\Big(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\Big)\vec{E} = \Big(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\Big)\vec{B} = \vec{0}\ .$$