Übungen zu MMP II	**Blatt Nr. 3**

[Tutorium 6.3., Abgabe 13.3.]

Aufgabe 1: Gradient, Divergenz und Rotation.

(a) Betrachtet wird das Vektorfeld

$$\vec{j} := xy^2\vec{e}_x + xyz\,\vec{e}_y + x^2z\,\vec{e}_z \ .$$

Bestimmen Sie $\nabla \cdot \vec{j}$, $\nabla(\nabla \cdot \vec{j}\,)$, $\nabla \times \vec{j}$, $\nabla \times (\nabla \times \vec{j}\,)$ (3 Punkte).

(b) Ein besonderer „Differenzialoperator“ sei als $\vec{L} \equiv \alpha\,\vec{r} \times \nabla$ definiert, wobei α eine Konstante ist. Sei $\phi(\vec{r}\,)$ eine beliebige differenzierbare Funktion. Verfizieren Sie die Gültigkeit folgender Identität (3 Punkte):

$$[L_x, L_y]\,\phi(\vec{r}\,) := (L_xL_y - L_yL_x)\,\phi(\vec{r}\,) = -\alpha L_z\phi(\vec{r}\,) \ .$$

Aufgabe 2: Quellenfreie Funktionen.

(a) Sei $r := |\vec{r}\,| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Verifizieren Sie die Gültigkeit der Gleichung (2 Punkte)

$$\nabla \cdot (\phi(r)\vec{r}\,) = 3\phi(r) + r\phi'(r) \ .$$

(b) Für welche $\phi(r)$ ist $\phi(r)\vec{r}$ quellenfrei (2 Punkte)?

(c) Wiederholen Sie die Aufgabe in zwei Dimensionen (2 Punkte).

Aufgabe 3: Harmonische Funktionen. Sei r wie in Aufgabe 2. Eine Funktion heisst „harmonisch“ falls sie die Gleichung $\nabla^2\phi = 0$ erfüllt.

(a) Verifizieren Sie die Gültigkeit der Gleichung (2 Punkte)

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{2}{r}\phi'(r) + \phi''(r) \ .$$

[Hinweis: Die Ergebnisse aus Blatt 1 / Aufgabe 3 könnten nützlich sein.]

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Gleichung $\nabla^2\phi(r) = 0$ (2 Punkte).

(c) Wiederholen Sie die Aufgabe in zwei Dimensionen (2 Punkte).

Aufgabe 4: Quellenfreie und wirbelfreie Strömung. Sei $r := |\vec{r}\,| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{j} := \phi(r)(y\vec{e}_x - x\vec{e}_y)$ quellenfrei ist (3 Punkte).

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{j} := \phi(r)\vec{r}$ wirbelfrei ist (3 Punkte).