Übungen zu MMP II	**Blatt Nr. 2**

[Tutorium 27.2., Abgabe 6.3.]

Aufgabe 1: Taylor-Entwicklung in drei Dimensionen. Betrachtet wird die Funktion

$$\phi(x,y,z) := -2z(x-y)^2 + (x+y)^2 - 2(x+y) + 4z(z^2 - 3z + 3) \ .$$

(a) Entwickeln Sie ϕ zur quadratischen Ordnung in der Taylor-Entwicklung um den Punkt $\vec{r}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ (3 Punkte).

(b) Die Funktion ϕ hat ein Extremum bei $\vec{r} = \vec{r}_0$. Handelt es sich um ein Maximum, Minimum, oder einen Sattelpunkt? Gibt es auch „flache Richtungen" (d.h. Richtungen ohne Krümmung)? (3 Punkte)

Aufgabe 2: Eigenschaften des Vektorproduktes.

(a) Eine „Raumspiegelung" ist eine Koordinatentransformation $\vec{r} \to \vec{r}\,' := -\vec{r}$. Sei $\vec{v} := \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$. Wie benehmen sich $\vec{v}$ und $\vec{l} := \vec{r} \times \vec{v}$ in einer Raumspiegelung (1 Punkt)? [Die unterschiedlichen Fälle werden als „Vektor" und „axialer Vektor" bezeichnet.]

(b) Obwohl $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ gilt, ist im Allgemeinen $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$. Ermitteln Sie, anhand der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ein Beispiel für eine Ungleichheit (2 Punkte).

(c) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ seien *nicht* orthogonal zueinander, aber trotzdem linear unabhängig. Ein vierter Vektor $\vec{v}$ wird als

$$\vec{v} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c}$$

ausgedrückt. Zeigen Sie, dass

$$\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$$

gilt, und ermitteln Sie die entsprechenden Ausdrücke für β and γ (3 Punkte).

Aufgabe 3: Spatprodukt. Die Koordinaten des Ortsvektors, $\vec{r} = (x,y,z)$, werden als

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\phi\ , \quad y = r\,\sin\theta\,\sin\phi\ , \quad z = r\,\cos\theta$$

parametrisiert. Wir definieren die Vektoren $\vec{e}_r := \partial_r\vec{r}$, $\vec{e}_\theta := \partial_\theta\vec{r}$, $\vec{e}_\phi := \partial_\phi\vec{r}$. Bestimmen Sie das Volumen des durch die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ gebildeten Parallelepipeds (6 Punkte).

Aufgabe 4: Doppeltes Vektorprodukt. Die Drehung eines starren Körpers wird durch ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ und eine Zentripetalbeschleunigung $\vec{a} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ geprägt. Die Richtung von $\vec{\omega}$ bestimmt die Drehachse, und $|\vec{\omega}| = 2\pi/P$, wobei P die Drehperiode ist. Der Koordinatenursprung liege beim Schwerpunkt, z.B. Erdmittelpunkt.

(a) Skizzieren Sie $\vec{v}$ und $\vec{a}$ auf der Oberfläche einer Kugel von Radius R (3 Punkte).

(b) Bestimmen Sie $|\vec{a}|$ auf dem Breitengrad $45°$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Erdbeschleunigung, $g \approx 9,8$ m/s^2 (3 Punkte). [Benutzen Sie $R \approx 6400$ km.]