Übungen zu MMP II	**Blatt Nr. 1**

[Tutorium 20.2., Abgabe 27.2.]

Aufgabe 1: Gradient und Niveauflächen. Betrachtet wird die Funktion $\phi(\vec{r}) := x^4 z + 8yz^2 + y^3$ in der Nähe des Punktes $\vec{r}_0 := (1, 0, -1)$, sowie die Niveaufläche $\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) = -1$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla\phi(\vec{r}_0)$ (2 Punkte).

(b) Ermitteln Sie zwei Einheitsvektoren, einen ($\vec{n}$) der normal zur Niveaufläche bei $\vec{r} = \vec{r}_0$ ist, und einen ($\vec{t}$) der in der Tangentebene der Niveaufläche bei $\vec{r} = \vec{r}_0$ liegt (2 Punkte).

(c) Besitzt die Funktion ϕ Extremstellen? Welchen Wert hat ϕ bei diesen (2 Punkte)?

Aufgabe 2: Vektorfelder in zwei Dimensionen. Ein gegebenes Skalarfeld $\phi(x, y)$ definiere ein Vektorfeld $\vec{E} := -\nabla\phi$, wobei $\nabla = \vec{e}_1\partial_x + \vec{e}_2\partial_y$ die zweidimensionale Version des Nabla-Operators ist. Skizzieren Sie $\vec{E}(x, y)$ in der (x, y)-Ebene, und bestimmen Sie ebenfalls die Funktion $\nabla \cdot \nabla\phi := (\partial_x^2 + \partial_y^2)\phi$, in den drei Fällen (jeweils 2 Punkte)

$$\text{(a)}\ \ \phi = x^2 + y^2\ ; \qquad \text{(b)}\ \ \phi = x^2 - y^2\ ; \qquad \text{(c)}\ \ \phi = 2xy\ .$$

[In der Elektrostatik des Vakuums sind elektrische Felder unbedingt der Form $\vec{E} = -\nabla\phi$, wobei die Gleichung $\nabla \cdot \nabla\phi = 0$ gleichzeitig erfüllt sein muss.]

Aufgabe 3: Gradient von kugelsymmetrischen Funktionen. Sei $r := |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Wenn eine Funktion f nur von r abhängig ist, heißt sie *kugelsymmetrisch*.

(a) Bestimmen Sie ∇r (2 Punkte).

(b) Verifizieren Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichung: $\nabla f(r) = \dfrac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\nabla r$ (2 Punkte).

(c) Bestimmen Sie ebenfalls $\nabla\left(\dfrac{1}{r^n}\right)$, $\quad n \in \mathbb{Z}$ (2 Punkte).

Aufgabe 4: Theoretische Aussagen zu Gradienten.

(a) Die Funktion f sei differenzierbar in einem Definitionsbereich D und die Punkte $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie die Gerade zwischen $\vec{a}, \vec{b}$ liegen im D. Zeigen Sie, dass es auf der genannten Gerade einen Punkt $\vec{r}_0$ gibt, so dass die Gleichung

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \nabla f(\vec{r}_0)$$

erfüllt ist (3 Punkte). [Hinweis: Die Gerade kann als $\vec{r}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ parametrisiert werden, mit $0 \le t \le 1$; benutzen Sie den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(\vec{r}(t))$.]

(b) Die Funktion $f(\vec{r})$ besitze eine im D konvergente Taylor-Entwicklung um den Punkt $\vec{r}_0$. Zeigen Sie, dass f der Form

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla f(\vec{r}_0) + \mathscr{O}(|\vec{r} - \vec{r}_0|^2)$$

ist, wobei $\lim_{\epsilon\to 0} \mathscr{O}(\epsilon) = 0$ gilt (3 Punkte).