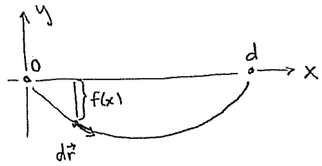
4. Variationsrechnung

[Lang & Pucker (15.1-2)]

Im Kap. 3.4 hatten wir die Verallgemeinerung Funktion → Distribution; jetzt kommt eine andere Verallgemeinerung: Funktion → Funktional.

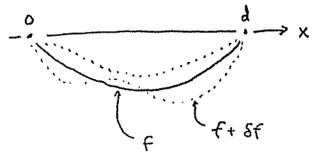


__Beispiel:__ Ein homogenes Seil (mit linearer Massendichte μ) ruht, wobei seine Potentialenergie minimiert wird. Welche Form hat es?

$$E = \int_C \underbrace{|d\vec{r}|\,\mu}_{dm} \cdot \underbrace{g}_{9{,}8\frac{m}{s^2}} \cdot \underbrace{(-f(x))}_{\text{Höhe}} \; ; \qquad \vec{r} = x\vec{e}_x - f(x)\vec{e}_y$$

$$= -\mu g \int_0^d dx \sqrt{1+[f'(x)]^2} \cdot f(x) \, .$$

Die Gesamtpotentialenergie hängt von einer Funktion ab, $f(x)$, mit $x \in (0,d)$, d.h. unendlich viele reelle Zahlen. Wir sagen, dass E ein __Funktional__ von f ist, $E[f]$. Um die minimale E zu finden, müssen wir $E[f]$ bzgl. f „variieren": ⟶



__Zusammenfassung:__

Funktion: Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x)$

Funktional: Abbildung $V \to \mathbb{R}$; $f \mapsto E[f]$

V = Raum von (stetigen und differenzierbaren) Funktionen

(__Bemerkung:__

Die Diracsche Deltafunktion, die auf Seite 52 als „Distribution" definiert wurde $\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\,\delta(x-y) = T(y) \;\; \forall\, T\right]$, könnte auch als „Funktional" definiert werden: $\delta_y[T] := T(y)$.)

__Definition:__

Funktionale können auch abgeleitet werden:

$$\frac{\delta E[f]}{\delta f(x)} := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E[f + \varepsilon\, \delta_x] - E[f]}{\varepsilon} \in \mathbb{R} \, .$$

Dirac-Delta bei x

„Funktionalableitung"

„variiere" Funktion am Ort x

Anscheinend wird eine extremale Funktion genau dann gefunden, wenn

$$\boxed{\frac{\delta E[f]}{\delta f(x)} = 0 \quad \forall x}$$

gilt.

(1707 - 1783)

Euler-Gleichung:

Sei jetzt $E[f]$ der Form $\underset{\text{Funktional}}{E[f]} = \int_a^b dx\, \underset{\text{Funktion}}{\mathcal{L}(f(x), f'(x))}$.

Dann gilt:

$$E[f+\varepsilon\delta_x] = \int_a^b dy\, \mathcal{L}\left(f(y)+\varepsilon\delta(y-x),\ f'(y)+\varepsilon\delta'(y-x)\right)$$

$$= \int_a^b dy\, \left\{ \mathcal{L}(f(y), f'(y)) + \varepsilon \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f}\delta(y-x) + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f'}\delta'(y-x)} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}$$

wie auf Seite 52:

$$\frac{d}{dy}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f'}\delta(y-x)\right\} - \left\{\frac{d}{dy}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f'}\right\}\delta(y-x)$$

benutze Hauptsatz; Randterme verschwinden

$$= E[f] + \varepsilon \int_a^b dy \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dy}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f'}\right]\delta(y-x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= E[f] + \varepsilon \left[\frac{\partial\mathcal{L}(f(x),f'(x))}{\partial f(x)} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}(f(x),f'(x))}{\partial f'(x)}\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta E[f]}{\delta f(x)} = \underline{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f'} \overset{!}{=} 0} \qquad \text{„Euler-Gleichung"}$$

Beispiel (Seite 55):

$$\mathcal{L} = -\mu g\, f\sqrt{1+(f')^2}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f} = -\mu g\sqrt{1+(f')^2}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f'} = -\mu g\frac{ff'}{\sqrt{1+(f')^2}}$$

Euler: $\sqrt{1+(f')^2} = \frac{d}{dx}\frac{ff'}{\sqrt{1+(f')^2}}$ Nichtlineare DG 2. Ordnung!

Trick: Betrachte $g := \frac{f}{\sqrt{1+(f')^2}} = \frac{f(1+(f')^2-(f')^2)}{\sqrt{1+(f')^2}}$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{ f\sqrt{1+(f')^2} - f'\frac{ff'}{\sqrt{1+(f')^2}} \right\}$$

$$= \overbrace{f'\sqrt{1+(f')^2} + \cancel{\frac{ff'f''}{\sqrt{1+(f')^2}}}}\ \overbrace{-\cancel{f''\frac{ff'}{\sqrt{1+(f')^2}}} - f'\frac{d}{dx}\left(\frac{ff'}{\sqrt{1+(f')^2}}\right)} = 0.$$

Euler!

D.h. $\frac{f}{\sqrt{1+(f')^2}} = \text{const.} =: \alpha \Rightarrow$ Lösung: $f(x) = \alpha\cosh\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)$!

Nichtlineare DG 1. Ordnung!