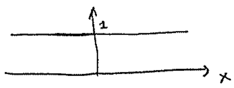
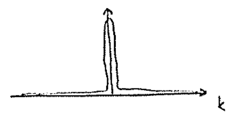
Folgerungen

(i) $f(x) = 1 \iff \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \overset{\text{Seite 51}}{=} 2\pi\,\delta(k)$





Also wie bei „Unschärferelation": k genau bestimmt $\Rightarrow$ x völlig unbekannt.
Es funktioniert auch in die umgekehrte Richtung:

$\tilde{f}(k) = 1 \iff f(x) = \delta(x)$.

Dasselbe in d Dimensionen:

$$\boxed{\int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \delta^{(d)}(\vec{r})}$$

(ii) Behauptungen:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy\; f(y)\, \cos(k(y-x)) \\ 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy\; f(y)\, \sin(k(y-x)) \end{cases}$$

Beweis: Integrationsordnung ändern

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \cdot \overbrace{\frac{e^{ik(y-x)} + e^{ik(x-y)}}{2}}^{\cos(k(y-x))}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, \frac{\delta(y-x) + \delta(x-y)}{2} = f(x).$$

Bei Sinus kürzen sich die zwei Terme.

(iii) Parsevalsche (1755 – 1836) Identität

Seien $f(x), g(x)$ zwei Funktionen und $\tilde{f}(k), \tilde{g}(k)$ ihre Fourier-Transformierten.

Es gilt:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, g^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, \tilde{g}^*(k).$$

Beweis:
$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$$
$$\tilde{g}^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g^*(y)\, e^{iky}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, \tilde{g}^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g^*(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(y-x)}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\; f(x)\, g^*(y)\, \delta(y-x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, g^*(x) \qquad \square.$$

Die Identität funktioniert auch bei $g(x) \to f(x) \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, [f(x)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, |\tilde{f}(k)|^2.$$ (vgl. Seite 49)

Anwendung: Lösung von Differenzialgleichungen durch Fourier-Analyse

Maxwell-Gleichungen im statischen Limes (Seite 35) $\Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\vec{E} = \vec{0} \\ \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\varrho \end{cases}$

$\vec{E}$ ist wirbelfrei $\xrightarrow{\text{Seite 36}}$ $\vec{E} = -\nabla\phi$ $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\varrho}$ „Poisson-Gleichung" (1781-1840)

Die Lösung der homogenen Gleichung wurde auf Seite 38 besprochen; jetzt suchen wir nach einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

__Behauptung:__ Wenn wir $\boxed{\nabla^2_{\vec{r}}\, G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')}$ lösen können,

dann ist $\boxed{\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\,'\; G(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\varrho(\vec{r}\,')}$ die gesuchte Lösung.

__Beweis:__ Nehme Ableitung $\Rightarrow$ $\nabla^2_{\vec{r}}\,\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\,' \left[-4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\right]\varrho(\vec{r}\,') = -4\pi\varrho(\vec{r})$ $\square$.

__Was ist $G(\vec{r}-\vec{r}\,')$?__ Benutze Fourier-Darstellung der „__Greenschen Funktion__" G und der Dirac-δ:

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\tilde{G}(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \quad ; \quad \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

Desweiteren gilt: $\nabla^2_{\vec{r}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) e^{ik_x x}\, e^{ik_y y}\, e^{ik_z z} = -\vec{k}^2\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

Zu lösen: $\boxed{\nabla^2_{\vec{r}}\, G(\vec{r}-\vec{r}\,') + 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') = 0}$

Fourier-Darstellung $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\left[-\vec{k}^2\,\tilde{G}(\vec{k}) + 4\pi\right] = 0$

Lösung im $\vec{k}$-Raum $\Rightarrow$ $\tilde{G}(\vec{k}) = \dfrac{4\pi}{\vec{k}^2}$

„Rücktransformation" $\Rightarrow$ $G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \displaystyle\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\cdot\frac{4\pi}{\vec{k}^2}\cdot e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \overset{\text{Seite 50}}{=} 4\pi\cdot\frac{1}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

Lösung im $\vec{r}$-Raum $\Leftrightarrow$ $\boxed{G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$

(Vergleiche mit Aufgabe 3.3: $\nabla^2\frac{1}{r} = 0 \quad \forall\, r>0$; aber __nicht__ bei $r=0$!)

Die gesuchte spezielle Lösung ist also

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\,'\; \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}.$$