3.4 Diracsche Deltafunktion (1902 - 1984)

[Lang & Pucker 13.4 (15.3)]

Fourier-Transformation (Seite 47): $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx}$, $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$.

(i) $\tilde{f}(k)$ im Ausdruck von $f(x)$ einsetzen (Integrationsvariable als $x \to y$ umnennen); Integrationsordnung ändern

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} \right\}}_{\stackrel{!}{=} \delta(x-y) \;:=\; \begin{cases} 0, & x \neq y \\ \int_{x-0^+}^{x+0^+} dy\, \delta(x-y) = 1 \end{cases}}$$

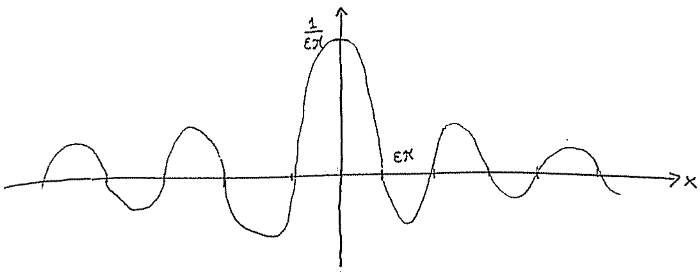
(ii) $f(x)$ im Ausdruck von $\tilde{f}(k)$ einsetzen (Integrationsvariable als $k \to q$ umnennen); Integrationsordnung ändern

$$\Rightarrow \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \tilde{f}(q) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(q-k)} \right\}}_{\delta(q-k)}.$$

Wie sieht die „Diracsche Deltafunktion" $\delta(x)$ aus? Betrachte die obige Darstellung als Limes:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{e^{ikx}}{2\pi i x} \right]_{k=-\frac{1}{\varepsilon}}^{k=\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi x} \cdot \frac{e^{\frac{ix}{\varepsilon}} - e^{-\frac{ix}{\varepsilon}}}{2i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\pi x}$$



$\Rightarrow$ für $\varepsilon \to 0$ ist die „Welle" schmal aber gespitzt (so dass $\int_{-0^+}^{+0^+} dx\, \delta(x) = 1$ gilt).

Einige andere Darstellungen (es gibt unendlich viele!):

* $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$ (Aufgabe 12.1)

* $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$ (wie in Aufgabe 12.2)

* $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$ (Seite 49)

* $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}$ (Aufgabe 13.1)

* $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{x - i\varepsilon}$ (Aufgabe 13.1)

Spielregeln

Mathematisch gesehen ist δ eine „Distribution" (statt Funktion); sie wird durch ihren Einfluß auf „Testfunktionen" definiert. Testfunktionen sollen „glatt" sein (beliebig oft differenzierbar) und einen „kompakten Träger" haben (außerhalb eines beschränkten Gebiets verschwinden).

Sei $T(x)$ eine beliebige Testfunktion. Dann gilt:

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(x-y) = T(y) \qquad (\text{Definition von } \delta)$$

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta'(x-y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partielle} \\ \text{Integration}}}{=} \underbrace{\Big[T(x)\,\delta(x-y)\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T'(x)\, \delta(x-y)$$

$$= -T'(y) \qquad (\text{aus Definition von } \delta)$$

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta''(x-y) = \dots = T''(y) \qquad \text{usw.}$$

$$* \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(ax) = \frac{1}{a} \int_{-\infty\,\mathrm{sign}(a)}^{\infty\,\mathrm{sign}(a)} d(ax)\, T\!\left(\frac{ax}{a}\right) \delta(ax) \overset{y=ax}{=} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, T\!\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y)$$

$$= \frac{1}{|a|}\, T(0) \quad \Rightarrow \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x) \quad .$$

Wir definieren auch die Stufenfunktion bzw. Heaviside-Funktion: (1850 - 1925)

Anschaulich:

$$\Theta(x-y) := \begin{cases} 1, & x > y \\ 0, & x < y \end{cases} \qquad \left(\text{Wert bei } x=y \text{ undefiniert; z.B. } \tfrac{1}{2}\right)$$

Durch Testfunktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \Theta(x-y) := \int_{y}^{\infty} dx\, T(x) \quad .$$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \Theta'(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x) \frac{d}{dx}\, \Theta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x) \left(-\frac{d}{dy}\right) \Theta(x-y)$$

$$= -\frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \Theta(x-y) = -\frac{d}{dy} \int_{y}^{\infty} dx\, T(x) = T(y)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Theta'(x-y) = \delta(x-y)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x'-y) = \Theta(x-y)} \quad .$$

——— ∘ ———

Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen:

$$\vec{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}_0) := \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)$$

$$\vec{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k \Rightarrow \delta^{(3)}(\vec{r}) := \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3) \qquad \left(\text{,,} = \prod_{k=1}^{3} \delta(x_k)\text{''}\right)$$

——— ∘ ———