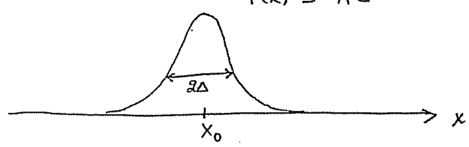
3.3 Fourier-Transformation [Lang & Pucker 13.1,3,5 (14.1,3,4)]

Was wenn keine Periodizität vorhanden ist / erwünscht ist?
Zum Beispiel: ein „Wellenpaket":

$$f(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



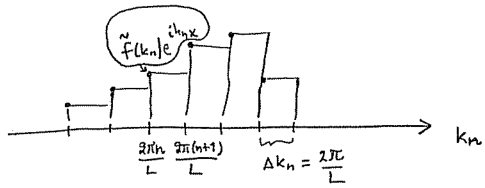
Betrachte komplexe Fourier-Reihe mit Definitionsbereich $x \in (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ (Seite 44; Aufgabe 11.2):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i \frac{2\pi n}{L} x}, \qquad \text{mit} \qquad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \, f(x) \, e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} .$$

Bezeichne: $\quad k_n := \frac{2\pi n}{L} \quad ; \quad \tilde{f}(k_n) := L c_n$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{L} \sum_{k_n} \tilde{f}(k_n) \, e^{i k_n x}, \qquad \text{mit} \qquad \tilde{f}(k_n) = \int_{-L/2}^{L/2} dx \, f(x) \, e^{-i k_n x} .$$

Für $L \to \infty$ sind die Werte von k_n sehr nah aneinander: $\Delta k_n = \frac{2\pi}{L}$.
Wenn wir $\sum_{k_n}$ mit Δk_n multiplizieren und dann $\Delta k_n \to 0$ schicken, erhalten wir ein bestimmtes Integral:



$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_n} \Delta k_n \, \tilde{f}(k_n) \, e^{i k_n x} \xrightarrow[\Delta k_n \to 0]{L \to \infty} \boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, \tilde{f}(k) \, e^{ikx}} , \quad (i)$$

$$\text{wobei} \quad \tilde{f}(k_n) = \int_{-L/2}^{L/2} dx \, f(x) \, e^{-i k_n x} \xrightarrow{L \to \infty} \boxed{\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \, e^{-ikx}} . \quad (ii)$$

Das Integral in (ii) heißt „Fourier-Transformation" und $\tilde{f}$ die „Fourier-Transformierte" von f; (i) heißt die „inverse Fourier-Transformation". Anscheinend geht keine Information verloren!

(Bemerkung: Häufig wird eine „symmetrische" Konvention benutzt: wenn $F(k)$ als

$$F(k) := \frac{\tilde{f}(k)}{\sqrt{2\pi}}$$

definiert wird, gilt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \, F(k) \, e^{ikx}, \qquad F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \, f(x) \, e^{-ikx} .$$
)

Eigenschaften:

(i) $f(x) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \tilde{f}^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{ikx} = \tilde{f}(-k) \qquad \text{(vgl. Fourier-Reihe, Seite 45)}$$

(ii) Ausgehend von (i) können Kosinus- und Sinus-Darstellungen ähnlich wie auf Seite 45 hergeleitet werden, spielen aber in der Praxis relativ selten eine Rolle.

(iii) Produkt: $(f\,g)(x) := f(x)\,g(x)$

Faltung bzw. Konvolution: $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x-y)\, g(y) \overset{y \to x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g(x-y)\, f(y)$.

Welche sind die entsprechenden Fourier-Transformierten?

(a)
$$\widetilde{(f*g)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x-y)\, g(y)\, \underbrace{e^{-ikx}}_{= e^{-ik(x-y)} e^{-iky}}$$

$$\overset{\substack{x = y + x' \\ dx = dx'}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')\, e^{-ikx'} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g(y)\, e^{-iky} = \tilde{f}(k)\, \tilde{g}(k)$$

(b)
$$(\tilde{f} * \tilde{g})(k) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \tilde{f}(k-q)\, \tilde{g}(q)$$

Inverse Transformation davon:

$$\widetilde{(\tilde{f} * \tilde{g})}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \tilde{f}(k-q)\, \tilde{g}(q)\, \underbrace{e^{ik\cdot x}}_{= e^{i(k-q)x} e^{iqx}}$$

$$\overset{k = q + k'}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi}\, \tilde{f}(k')\, e^{ik'x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \tilde{g}(q)\, e^{iqx} = f(x)\, g(x).$$

D.h.: $\widetilde{\text{Faltung}} = \text{Produkt}$, $\widetilde{\text{Produkt}} = \text{Faltung}$.

(iv) In drei Dimensionen: transformiere bzgl. jeder Koordinate!

$$\begin{cases} \tilde{f}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, e^{-ik_1x_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, e^{-ik_2x_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_3\, e^{-ik_3x_3}\, f(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{d^3\vec{r}}_{dV,\ \text{vgl. Seite 26}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, f(\vec{r}) \\ f(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \tilde{f}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{cases}$$

In „vier" Dimensionen (Zeit+Raum): bei der Zeitkoordinate wird häufig eine entgegengesetzte Zeichenkonvention verwendet:

$$\begin{cases} \tilde{f}(\omega, \vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}\; e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, f(t, \vec{r}) \\ f(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \tilde{f}(\omega, \vec{k}) \end{cases}$$

— o —