Kosinus - und Sinus-Reihen

Weil $f(x)$ reell ist, gilt $\quad c_n^* = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{i\frac{2\pi n x}{L}} \overset{!}{=} c_{-n} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Die komplexe Fourier-Reihe kann also umgeschrieben werden:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}$$

$$\overset{\text{Euler-Formel}}{=} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ c_n\left[\cos\left(\tfrac{2\pi n x}{L}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi n x}{L}\right)\right] + c_n^*\left[\cos\left(\tfrac{2\pi n x}{L}\right) - i\sin\left(\tfrac{2\pi n x}{L}\right)\right]\right\}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right),$$

wobei
$$\left\{\begin{aligned} a_n &= c_n + c_n^* = 2\,\mathrm{Re}(c_n) \\ b_n &= i(c_n - c_n^*) = -2\,\mathrm{Im}(c_n) \end{aligned}\right\}$$
gilt.

Jetzt ist alles reell, und die Summen laufen nur über positive „Kreisfrequenzen" $\frac{2\pi n}{L}$! Die expliziten Ausdrücke für die neuen Fourier-Koeffizienten:

$$\left\{\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x) = \text{„Mittelwert"}, \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\left(e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} + e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right) = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \\ b_n &= \frac{i}{L}\int_0^L dx\, f(x)\left(e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} - e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right) = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right). \end{aligned}\right.$$

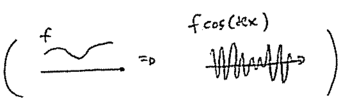
Eigenschaften:

* $b_n = 0 \quad \forall\, n \geq 1 \Rightarrow f(x)$ ist symmetrisch $\forall\, x$.

* $c_0 = 0,\quad a_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow f(x)$ ist antisymmetrisch $\forall\, x$.

* „Riemann - Lebesgue - Lemma" (ohne Beweis): (1826-1866) (1875-1941)

$$\lim_{\varkappa\to\infty}\int_a^b dx\, f(x)\cos(\varkappa x) = \lim_{\varkappa\to\infty}\int_a^b dx\, f(x)\sin(\varkappa x) = 0$$



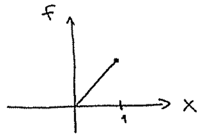
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

* Die Fourier-Darstellung kann abgeleitet / integriert werden; bei Ableitungen erhält man

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n b_n}{L}\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n a_n}{L}\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right),$$

aber falls $n a_n$, $n b_n$ für $n\to\infty$ nicht mehr verschwinden, hat man den Konvergenzbereich verlassen!

Beispiel: $f(x) = x\,, \quad 0 < x \le 1$



(i) Darstellung als Funktion mit Periode $L = 1$:

$$c_0 = \int_0^1 dx\, x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \int_0^1 dx\, x\, e^{-i 2\pi n x} \overset{n\neq 0}{\underset{\text{partielle Integration}}{=}} \left[\frac{x}{-i2\pi n} e^{-i2\pi n x}\right]_0^1 + \frac{1}{i2\pi n} \underbrace{\int_0^1 dx\, e^{-i2\pi n x}}_{0}$$

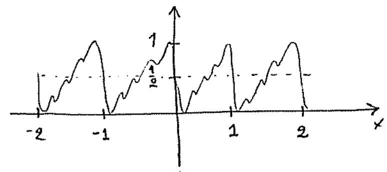
$$= \frac{i}{2\pi n}$$

$$\Rightarrow a_n = 2\,\mathrm{Re}\,(c_n) = 0\,; \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\,(c_n) = -\frac{1}{\pi n}$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Symmetrisch}} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n x)$$

konvergiert langsam; $f'(x)$ nicht OK

antisymmetrisch



(ii) Darstellung als symmetrische Funktion mit Periode $L = 2$: $f_S(x) = |x|\,, \; |x| \le 1$.

Aufgabe 11.2 $\Rightarrow$
$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dx\, |x| = \frac{1}{2} \\ a_n = \int_{-1}^{+1} dx\, |x| \cos\left(\frac{2\pi n x}{2}\right) = 2\int_0^1 dx\, x \cos(\pi n x) \end{cases}$$

$$\underset{\text{partielle Integration}}{=} 2\underbrace{\left[\frac{x}{\pi n}\sin(\pi n x)\right]_0^1}_{0} - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 dx\, \sin(\pi n x)$$

$$= +\frac{2}{(\pi n)^2}\left[\cos(\pi n x)\right]_0^1 = \frac{2}{(\pi n)^2}\left[(-1)^n - 1\right] = -\frac{4}{\pi^2 n^2}\,,$$

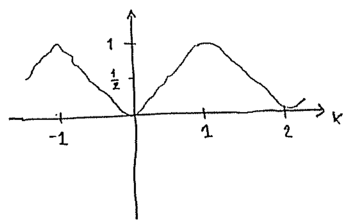
für ungerades n

$$b_n = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\ldots} \frac{1}{n^2} \cos(\pi n x)$$

konvergiert schnell; $f'(x)$ auch OK!

Symmetrisch



(iii) Darstellung als antisymmetrische Funktion mit Periode $L = 2$: $f_A(x) = x\,, \quad |x| \le 1$.

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dx\, x = 0$$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dx\, x\, e^{-i\pi n x} \overset{n\neq 0}{=} \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\left[\frac{x}{-i\pi n} e^{-i\pi n x}\right]_{-1}^{1}}_{\frac{(-1)^n}{-i\pi n} + \frac{(-1)^n}{-i\pi n} = \frac{2i(-1)^n}{\pi n}} + \frac{1}{i\pi n}\underbrace{\int_{-1}^{+1} dx\, e^{-i\pi n x}}_{0}\right\}$$

$$a_n = 0\,; \qquad b_n = -\frac{2}{\pi n}(-1)^n$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(\pi n x)$$

konvergiert langsam; $f'(x)$ nicht OK