3.2 Fourier-Reihe [Lang & Pucker 12.1-5, (13.1-5)]

1768-1830

Die Fourier-Analyse gehört zu den wichtigsten Methoden zur Untersuchung von Funktionen (auch experimentellen Daten); Anwendungsbereiche sind u.a.

* Systematische Zerlegung periodischer Funktionen nach ihren Teilfrequenzen (Grundton, Obertöne);
* „Unitäre Basistransformation" Koordinatenraum $\leftrightarrow$ Impulsraum, und Lösung von Differenzialgleichungen im Impulsraum;
* annähernde Darstellung von Funktionen (statt Taylor-Entwicklung).

Sei $f(x) \in \mathbb{R}$ eine periodische Funktion, d.h.

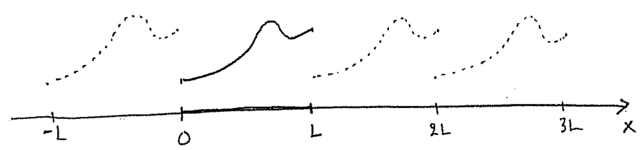
$$f(x+nL) = f(x) \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad ,$$

wobei $L > 0$ die Periode bezeichnet. Dieses ist relevant, falls:

(a) $x \to t$ und es um eine Welle | Schwingung geht;

(b) x eine „Winkelvariable" ist, wie z.B. bei Polarkoordinaten: $x \to \varphi$, $L \to 2\pi$;

(c) der Raum kompakt ist, z.B. $x \in (0, L]$. In diesem Fall können wir die Funktion sogar auf mehreren Weisen als eine periodische Funktion darstellen:

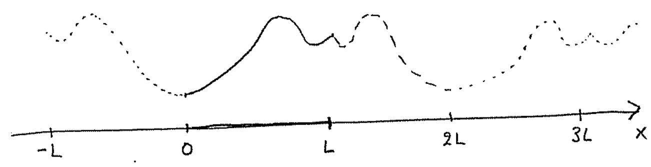


Periode = L

$x \bmod L := \{x+nL \mid x+nL \in (0,L]\}$

$f_p(x) := f(x \bmod L)$

allgemein — im Def. bereich



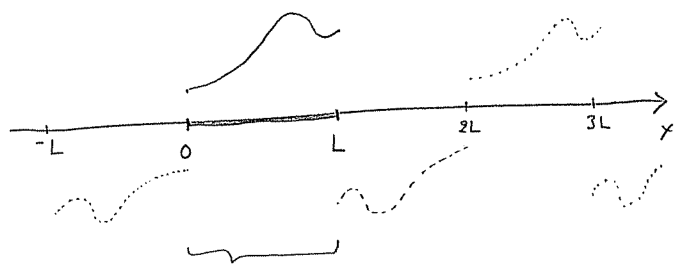
Periode = 2L

„symmetrische Fortsetzung"

$f_s(2L-x) := f(x)\ ,\quad x \in (0,L]$

$f_p(x) := f_s(x \bmod 2L)$

allgemein — im Def. bereich



ursprünglicher Definitionsbereich

Periode = 2L

„antisymmetrische Fortsetzung"

$f_A(2L-x) := -f(x)\ ,\quad x \in (0,L]$

$f_p(x) := f_A(x \bmod 2L)$

allgemein — im Def. bereich

Komplexe Form der Fourier-Reihe

$\boxed{\text{Sei } f(x) \text{ periodisch, mit Periode } L}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\frac{2\pi n}{L}x}, \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \in \mathbb{C}.}$

Die c_n heißen „Fourier-Koeffizienten". (Es wird angenommen, dass die Reihe konvergiert.)

Begründung. (i) („$\Leftarrow$") $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$ ist periodisch:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}(x+L)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \cdot \underbrace{e^{i2\pi n}}_{1 \text{ (Euler-Formel)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

(ii) („$\Rightarrow$")

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \quad \Big| * e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}$$

$$\Rightarrow \int_0^L dx\, f(x)\, e^{-i\frac{2\pi m}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_0^L dx\, e^{i\frac{2\pi(n-m)}{L}x}}$$

$$n = m \Rightarrow \int_0^L dx = L$$

$$n \neq m \Rightarrow \frac{L}{i2\pi(n-m)}\left[e^{i\frac{2\pi(n-m)}{L}x}\right]_0^L = \frac{L}{i2\pi(n-m)}[1-1] = 0$$

$$= L \cdot c_m \Rightarrow \square.$$

Wird genauer in MMP III diskutiert.

(iii) („$\Rightarrow$") Bemerkung (Seite 41 ein wenig umgeschrieben):

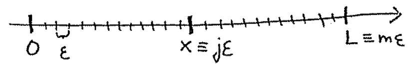
$$\sum_{n=0}^{m-1} e^{i\frac{2\pi n}{m}(j-k)} = \begin{cases} m, & j=k \\ \dfrac{1-z^m}{1-z} \text{ mit } z = e^{i\frac{2\pi(j-k)}{m}}, & j \neq k \ (z \neq 1), \end{cases}$$

weil $(1+z+\ldots+z^{m-1})(1-z) = 1-z^m$ gilt.

Nehme $j,k \in \{0,\ldots,m-1\}$ $\Rightarrow$ $z^m = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} e^{i\frac{2\pi n}{m}(j-k)} = \delta_{jk}. \quad (*)$$

Diskretisiere:



Es folgt: $f(x) = f(j\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} f(k\varepsilon)\,\delta_{jk}$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} \underbrace{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(k\varepsilon)\, e^{-i\frac{2\pi n k}{m}}}_{=:c_n'} \cdot \underbrace{e^{i\frac{2\pi n j}{m}}}_{e^{i\frac{2\pi n j\varepsilon}{m\varepsilon}} = e^{i\frac{2\pi n x}{L}}}$$

δ_{jk} durch $(*)$ und vertausche Ordnung von Summen

$$= \sum_{n=0}^{m-1} c_n' \, e^{i\frac{2\pi n x}{L}}$$

Dieses gilt $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ auch für $\varepsilon \to 0^+$ „$\square$".

[Mathematisch genommen gilt dies nur für eine besondere Klasse von Funktionen.]