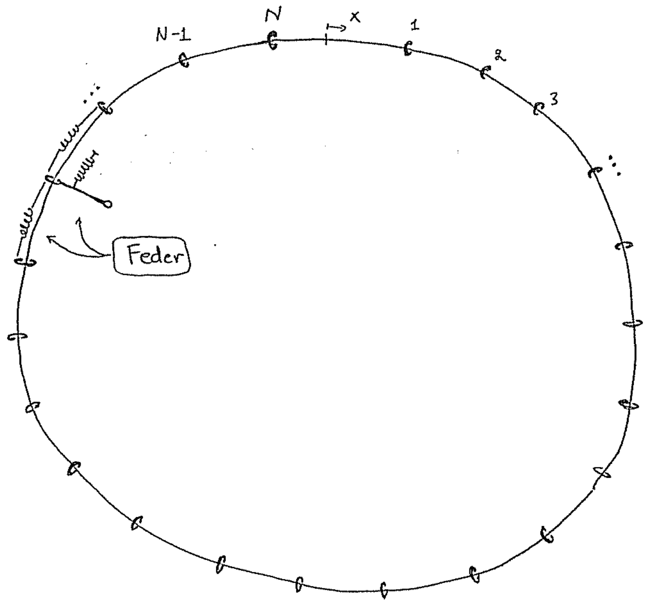
3. Integraltransformationen

3.1 Gekoppelte Oszillatoren [nicht im Lang & Pucker ; Berner Tradition !]

Integraltransformationen sind eine wichtige Methode zur Lösung von Differenzialgleichungen und auch zur allgemeinen Analyse von Funktionen. Die prinzipiellen Werkzeuge werden hier anhand eines physikalischen Beispiels eingeführt.

Betrachte eine „Perlenkette":



Koordinaten: $x_1, \dots, x_N$;

$x_{N+1} := x_1$.

Gleichgewichtslage:

$x_{j,0}$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

Auslenkung aus Gleichgewichtslage:

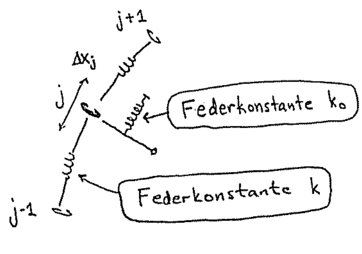
$\Delta x_j := x_j - x_{j,0}$.

Beziehung zu einem „Feld":

Falls es sehr viele Perlen gibt $(N \to \infty)$ und diese nah aneinander sind $(|x_{j+1,0} - x_{j,0}| \to 0)$, können wir die Auslenkung Δx_j als „Wert eines Feldes" betrachten, und den Index j (oder die Gleichgewichtslage $x_{j,0}$) als Koordinate:

$$\Delta x_j(t) \leftrightarrow \phi(t,y)$$

Bewegungsgleichungen:



$$m_j \Delta \ddot{x}_j = - k_0 \Delta x_j - k (\Delta x_j - \Delta x_{j-1}) + k (\Delta x_{j+1} - \Delta x_j)$$

„eigene" Feder

„linke" Feder zieht Perle nach links, falls ausgedehnt

„rechte" Feder zieht Perle nach rechts, falls ausgedehnt

$$\Leftrightarrow \quad m_j \partial_t^2 \Delta x_j = - k_0 \Delta x_j + k \varepsilon^2 \frac{\Delta x_{j+1} - 2\Delta x_j + \Delta x_{j-1}}{\varepsilon^2} , \quad \varepsilon := |x_{j+1,0} - x_{j,0}|$$

$$\leftrightarrow \quad m(y) \partial_t^2 \phi(t,y) = - k_0 \phi(t,y) + k \varepsilon^2 \partial_y^2 \phi(t,y) .$$

Bemerkung:

Die rechte Seite kann als $-\frac{\partial V}{\partial x_j}$ ausgedrückt werden, mit

$$V := \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2} k_0 (\Delta x_j)^2 + \frac{1}{2} k (\Delta x_{j+1} - \Delta x_j)^2 \right\} .$$

Normalkoordinaten:

Eine direkte Lösung der Bewegungsgleichungen scheint schwierig, weil (bei $k \neq 0$) mehrere Perlen aneinander gekoppelt sind. Mit Hilfe von „Normalkoordinaten" kann eine Lösung aber gefunden werden.

Bezeichne $q_j := \sqrt{m_j}\, \Delta x_j$, oder $\Delta x_j = \frac{1}{\sqrt{m_j}}\, q_j$.

Das Potential V ist quadratisch in $\{q_j\} \Rightarrow$ es kann als

$$V = \sum_{j,\ell=1}^{N} \frac{1}{2} V_{j\ell}\, q_j q_\ell$$

ausgedrückt werden (vgl. MMP I, Kap. 3.6: „quadratische Form").

Eigenschaften vom V:

(i) $V_{j\ell}$ können als Matrixelemente einer $N \times N$ - Matrix betrachtet werden.

(ii) $V_{j\ell} \in \mathbb{R} \quad \forall\, j,\ell$, d.h. die Matrix ist <u>reell</u>.

(iii) $\sum_{j\ell} \frac{1}{2} V_{j\ell}\, q_j q_\ell = \sum_{j,\ell} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} V_{j\ell}\, q_j q_\ell + \frac{1}{2} V_{\ell j}\, q_\ell q_j \right\} = \sum_{j,\ell} \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{j\ell} + V_{\ell j}}{2}\, q_j q_\ell$,

d.h. die Matrix ist <u>symmetisch</u>.

Aus der linearen Algebra:

(i) Eigenwerte sind reell; bezeichne sie mit $+\omega_j^2$.

(ii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

(iii) Die Matrix kann mit einer orthogonalen Basistransformation diagonalisiert werden:

$$q^T V q = q^T \mathcal{O}\, \mathcal{O}^T V \mathcal{O}\, \mathcal{O}^T q = \underbrace{(\mathcal{O}^T q)^T}_{Q^T}\ \underbrace{\mathcal{O}^T V \mathcal{O}}_{\begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots\ \omega_N^2 \end{pmatrix}}\ \underbrace{(\mathcal{O}^T q)}_{=:Q}$$

Vgl. MMP I, Kap. 3.6

Zur Erinnerung: $\exists\, \mathcal{O}$ auch wenn $\nexists\, V^{-1}$!

Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{q}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\sum_{\ell=1}^{N} V_{j\ell}\, q_\ell$$

$\mathcal{O}^T$ $\quad$ $\mathcal{O}^T$ $\quad$ $\mathcal{O}^T$ $\quad$ $\mathcal{O}\mathcal{O}^T$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Q}_j = -\omega_j^2\, Q_j \quad , \; j \in \{1, \ldots, N\} .$$

D.h. wir erhalten ein System von N <u>entkoppelten</u> „harmonischen" Oszillatoren!

Dasselbe funktioniert unabhängig vom N, also auch bei $N \to \infty$; allerdings ist Umgang mit $\infty \times \infty$ - Matrizen schwierig, so dass für die praktische Durchführung eine andere Vorgehensweise benötigt wird.

— o —