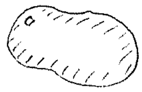
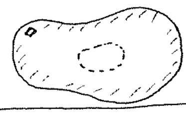
$\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$

Sei G ein zusammenhängendes Gebiet „ohne Löcher".


ja


nein

Behauptung:

$\boxed{\vec{B} \text{ ist quellenfrei in } G, \text{ d.h. } \nabla\cdot\vec{B} = 0.}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{B} \text{ ist der Form } \vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \text{ d.h. „hat ein Vektorpotential".}}$

Beweis:

Es ist zuerst zu bemerken, dass ein mögliches $\vec{A}$ nicht eindeutig sein kann:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}_1 = \nabla\times\vec{A}_2$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\times(\vec{A}_1-\vec{A}_2) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}_1 = \vec{A}_2 + \nabla\chi \qquad (\text{„nur zwei echte Freiheitsgrade"})$$

Seite 36

In der Physik wird diese Tatsache „Eichinvarianz" genannt.

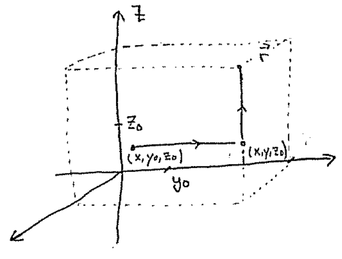
„$\Leftarrow$" $\quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\vec{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$

Poincaré-Lemma (Seite 14)

„$\Rightarrow$" Wir benutzen kartesische Koordinaten.

Durch eine Wahl von χ kann erreicht werden, dass $A_z = 0$ gilt.

Integriere dann über bekannte Komponenten von $\vec{B}$ entlang zweier Achsen:



$$\vec{A}(x,y,z) := \vec{e}_x\left(\int_{z_0}^{z} dz'\, B_y(x,y,z') - \int_{y_0}^{y} dy'\, B_z(x,y',z_0)\right) - \vec{e}_y \int_{z_0}^{z} dz'\, B_x(x,y,z')$$

Es folgt:

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \int_{z_0}^{z} dz'\, B_y - \int_{y_0}^{y} dy'\, B_z & -\int_{z_0}^{z} dz'\, B_x & 0 \end{vmatrix}$$

der zweite Term ist unabhängig von z!

$$= \vec{e}_x\left(\partial_z \int_{z_0}^{z} dz'\, B_x\right) + \vec{e}_y\left(\partial_z \int_{z_0}^{z} dz'\, B_y\right) + \vec{e}_z\left(-\partial_x \int_{z_0}^{z} dz'\, B_x - \partial_y \int_{z_0}^{z} dz'\, B_y + \partial_y \int_{y_0}^{y} dy'\, B_z\right)$$

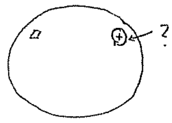
$$= \vec{e}_x B_x + \vec{e}_y B_y + \vec{e}_z \left[-\int_{z_0}^{z} dz'\, \underbrace{(\partial_x B_x + \partial_y B_y)}_{-\partial_z B_z\,!} + B_z(x,y,z_0)\right]$$

$$= \vec{e}_x B_x + \vec{e}_y B_y + \vec{e}_z\left[B_z(x,y,z) - \cancel{B_z(x,y,z_0)} + \cancel{B_z(x,y,z_0)}\right]$$

$$= \vec{B}(x,y,z) \qquad \square\,.$$

— o —

Bemerkung: Wenn G Löcher hat, kann die Lösung von $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ noch lokal als $\vec{B} = \nabla\times\underset{\sim}{\vec{A}}$ dargestellt werden; allerdings besitzt $\underset{\sim}{\vec{A}}$ Singularitäten („Dirac-Strings"). Dieses führt dazu, dass der „Fluß" $\Phi = \oint_S d\vec{A}\cdot\vec{B}$ $= \oint_S d\vec{A}\cdot\nabla\times\underset{\sim}{\vec{A}} = \int_? d\vec{r}\cdot\underset{\sim}{\vec{A}}$ nicht unbedingt verschwindet, weil auch ein infinitesimal kurzes Linienintegral um einen singulären Punkt einen endlichen Beitrag liefern kann! (vgl. Aufgabe 9.4)



Beispiel: $\vec{E} = \frac{q}{r^2}\,\vec{e}_r$ (Seite 32)

$\nabla\cdot\vec{E} = 0$ bei $r>0$ (Seite 32), aber $\vec{E}$ singulär bei $\vec{r} = \vec{0}$, d.h. wir sollten den Ursprung abschneiden!

Fluß: $$\Phi = \oint_S d\vec{A}\cdot\vec{E} \underset{\text{in Kugelkoordinaten}}{=} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; \underbrace{h_\theta h_\varphi}_{r^2\sin\theta} \; \underbrace{\vec{e}_\theta\times\vec{e}_\varphi}_{\vec{e}_r}\cdot\vec{E} = q\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta = 4\pi q \neq 0!$$

— o —

Letztendlich noch ein Beispiel für eine homogene Gleichung zweiter Ordnung:

$\boxed{\nabla^2\phi = 0}$ „Laplace-Gleichung"

Im Allgemeinen gibt es nichttriviale Lösungen; diese werden „harmonische Funktionen" genannt. ($z.B.\ \phi = \sin(kx)e^{ky}$) (Vgl. Aufgabe 3.3 für den Fall von kugelsymmetrischen Lösungen.) Allerdings ist die Menge der Lösungen relativ „beschränkt":

Behauptung: Wenn am Rande des betrachteten Volumens die Funktion ϕ entweder verschwindet („Dirichletsche Randbedingung") oder einen Gradienten orthogonal zum $d\vec{A}$ hat („Neumannsche Randbedingung"), dann gibt es keine überall in V differenzierbaren ($\nabla\phi$ ist endlich) nichttrivialen Lösungen.

Beweis: Aufgabe 8.3(a) [erster Greenscher Satz] (1793 – 1841)

$$\Rightarrow \int_V dV\,\underbrace{|\nabla\phi|^2}_{\geq 0} \underset{\text{Gaußscher Satz}}{=} \int_{\partial V} d\vec{A}\cdot\phi\nabla\phi = 0$$

Dirichlet (1805 – 1859)

Neumann (1832 – 1925)

Wenn über eine nichtnegative Funktion integriert wird und das Integral verschwindet, muß die Funktion selbst verschwinden

$$\Rightarrow |\nabla\phi|^2 = 0 \Rightarrow \nabla\phi = \vec{0} \underset{\text{Seite 35}}{\Rightarrow} \phi = \text{const.} \quad \square$$

— o — o —