2.9 Differenzialgleichungen in drei Dimensionen [(Lang & Pucker 11.2)]

nur in der neuen Auflage!

Viele der wichtigsten Gleichungen der Physik sind Differenzialgleichungen 1. oder 2. Ordnung in drei räumlichen Dimensionen.

Hydrodynamik „Kontinuitätsgleichung": $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

„Navier-Stokes-Gleichung": $\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nu \nabla^2 \vec{v}$

Elektrodynamik „Maxwell-Gleichungen":

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

„Wellengleichungen":

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = \vec{0} \\ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{B} - \nabla^2 \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

Quantenmechanik „Schrödinger-Gleichung": $i\hbar \partial_t \Psi = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \Psi$

Statistische Physik „Diffusionsgleichung": $\partial_t T = D \cdot \nabla^2 T$

Wir betrachten den „statischen" Limes, d.h. $\partial_t \to 0$, und vorerst homogene Gleichungen („keine Quellen", d.h. $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$ in Maxwell) erster Ordnung.

$$\boxed{\nabla \phi = \vec{0}} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = 0 \quad \forall k$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi \text{ ist konstant!}$$

(Bemerkung: Im Kap. 2.1 (Seite 6) wurden Extremstellen, $\vec{r}_0$, durch die Gleichung $\nabla f(\vec{r}_0) = \vec{0}$ definiert; Jetzt verlangen wir dagegen, dass $\nabla \phi(\vec{r}) = \vec{0}$ für $\underline{\underline{\forall \vec{r}}} \in \mathbb{R}^3$ gilt!)

Die Gleichungen $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ und $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ besitzen aber unendlich viele nichttriviale (d.h. ortsabhängige) Lösungen!

(z.B. Seite 12: $\vec{B} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$; Seite 13: $\vec{E} = \vec{r} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$)

$\boxed{\nabla\times\vec E=\vec 0}$ Sei G ein „einfach zusammenhängendes" Gebiet.

Behauptung: $\boxed{\vec E \text{ ist wirbelfrei in } G, \text{ d.h. } \nabla\times\vec E=\vec 0}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\vec E \text{ ist der Form } \vec E=-\nabla\phi, \text{ d.h. „hat ein Skalarpotential".}}$

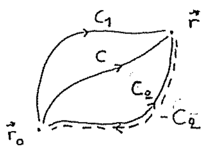
Beweis:

„$\Leftarrow$" $\quad \vec E=-\nabla\phi \Rightarrow \nabla\times\vec E=-\nabla\times\nabla\phi=\vec 0.$

(Poincaré-Lemma (Seite 14))

„$\Rightarrow$" Wähle $\vec r_0$, und definiere

$$\phi(\vec r):=-\int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec s\cdot\vec E(\vec s).$$

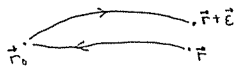


Diese Definition ist unabhängig vom Integrationsweg:

$$\int_{C_1} d\vec s\cdot\vec E-\int_{C_2} d\vec s\cdot\vec E=\oint_{C_1+(-C_2)} d\vec s\cdot\vec E\overset{\text{Stokes}}{=}\int_S d\vec A\cdot\underbrace{\nabla\times\vec E}_{\vec 0}=0.$$

$\Rightarrow \phi(\vec r)$ ist eine eindeutige Funktion.

Betrachte jetzt $C_1=\uparrow_{\vec r}^{\vec r+\vec\varepsilon}$, $C_2=$



Entlang C_1: $\quad -\int_{\vec r}^{\vec r+\vec\varepsilon} d\vec s\cdot\vec E=-\vec\varepsilon\cdot\vec E(\vec r)+O(\vec\varepsilon^2).$

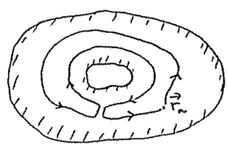
(Taylor in $\vec\varepsilon$ bzw. Mittelwertsatz)

Entlang C_2: $\quad +\int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec s\cdot\vec E-\int_{\vec r_0}^{\vec r+\vec\varepsilon} d\vec s\cdot\vec E=\phi(\vec r+\vec\varepsilon)-\phi(\vec r)=\vec\varepsilon\cdot\nabla\phi(\vec r)+O(\vec\varepsilon^2)$

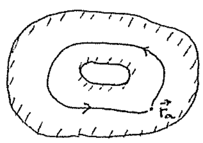
(Definition von ϕ) (Taylor in $\vec\varepsilon$)

Vergleich $\Rightarrow \vec E=-\nabla\phi$ $\quad\square$.

Bemerkung: Wenn G nicht einfach zusammenhängend ist, kann die Lösung von $\nabla\times\vec E=\vec 0$ noch lokal als $\vec E=-\nabla\phi$ dargestellt werden; allerdings ist ϕ nicht eindeutig. Dies führt dazu, dass die „Zirkulation",
$\Gamma:=\oint d\vec r\cdot\vec E=-\oint d\vec r\cdot\nabla\phi=-[\phi(\vec r_a)-\phi(\vec r_a)]$ nicht unbedingt verschwindet!



$\Gamma=0$



$\Gamma\neq 0$ möglich.

Beispiel: $\vec B=\frac{j}{\varrho}\vec e_\varphi$ (Seite 34)

$\nabla\times\vec B=0$ (Seite 34), aber $\vec B$ ist singulär bei $\varrho=0$, d.h. wir müssen die z-Achse abschneiden!

Zirkulation: $\Gamma=\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{d\vec r}{d\varphi}\cdot\vec B\overset{\text{in Polarkoordinaten}}{=}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\underbrace{h_\varphi}_{\varrho}\,\underbrace{\vec e_\varphi\cdot\vec B}_{\frac{j}{\varrho}}=2\pi j\neq 0!$

(vgl. Aufgabe 9.3)