Verallgemeinerungen

$*$ Sei $\vec{E} = \vec{e}_c\,\phi$. ($\vec{e}_c$ konstant) Seite 14 / 18 $\Rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{E} = \vec{e}_c\cdot\nabla\phi$

Gauß: $\displaystyle\int_V dV\,\vec{e}_c\cdot\nabla\phi = \int_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{e}_c\,\phi$

$\displaystyle\Leftrightarrow\ \vec{e}_c\cdot\left[\int_V dV\,\nabla\phi - \int_{\partial V} d\vec{A}\,\phi\right] = 0\,.$

Gilt für jeden $\vec{e}_c$ $\Rightarrow$ $\boxed{\displaystyle\int_V dV\,\nabla\phi = \int_{\partial V} d\vec{A}\,\phi}$

$*$ Sei $\vec{E} = \vec{e}_c\times\vec{B}$. Seite 14 / 18 $\Rightarrow$ $\nabla\cdot(\vec{e}_c\times\vec{B}) = -\vec{e}_c\cdot(\nabla\times\vec{B})$

Gauß: $\displaystyle -\int_V dV\,\vec{e}_c\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \int_{\partial V} d\vec{A}\cdot(\vec{e}_c\times\vec{B})$

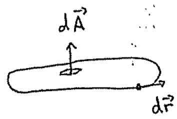
Seite 9: $d\vec{A}\cdot(\vec{e}_c\times\vec{B}) = -\vec{e}_c\cdot(d\vec{A}\times\vec{B})$

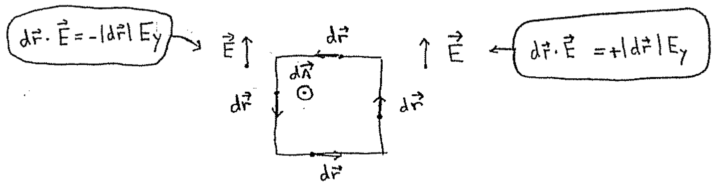
$\displaystyle\Leftrightarrow\ \vec{e}_c\cdot\left[\int_V dV\,\nabla\times\vec{B} - \int_{\partial V} d\vec{A}\times\vec{B}\right] = 0\,.$

Gilt für jeden $\vec{e}_c$ $\Rightarrow$ $\boxed{\displaystyle\int_V dV\,\nabla\times\vec{B} = \int_{\partial V} d\vec{A}\times\vec{B}}$

Definition

Sei $d\vec{r}$ ein Kurvenelement (im Sinne von Kap. 2.5 / Seite 19), welches gegen den Uhrzeigersinn bzgl. Flächenelemente $d\vec{A}$ zeigt:





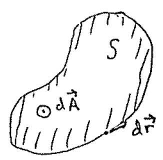
Stokesscher Satz

Wenn $d\vec{A}$ und $d\vec{r}$ wie oben definiert sind, dann gilt:

$$\boxed{\int_S d\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{E} = \int_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{E}}$$

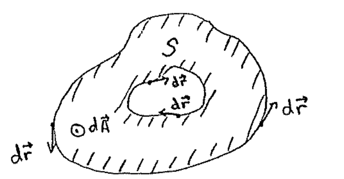
„Rotation ⟺ Arbeitsintegral" (bzw. „Zirkulation")

Die Kurve ∂S ist der Rand der Oberfläche S.



$\Downarrow$

∂S ist eine abgeschlossene Kurve.

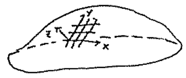


$\Downarrow$

∂S besteht aus zwei disjunkten Kurven.

Begründung

Schneide Oberfläche in kleine Rechtecks:



Für jedes Rechteck gilt (Seite 13):

$$(\nabla\times\vec{E})_z \approx \frac{1}{dx}\left[E_y\left(\vec{r}+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)-E_y\left(\vec{r}-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)\right]-\frac{1}{dy}\left[E_x\left(\vec{r}+\frac{dy\,\vec{e}_y}{2}\right)-E_x\left(\vec{r}-\frac{dy\,\vec{e}_y}{2}\right)\right] \quad \Big|\times dx\,dy$$

$$\Rightarrow \; d\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{E}) \approx d\vec{r}_y\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)-\vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)\right]-d\vec{r}_x\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dy\,\vec{e}_y}{2}\right)-\vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dy\,\vec{e}_y}{2}\right)\right].$$

Summiere über Rechtecks! Die linke Seite wird zum $\sum_{\vec{r}} d\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{E})$.
Auf der rechten Seite kürzen sich alle Beiträge vom Innen:

$$d\vec{r}_y\cdot\left[\ldots+\vec{E}\left(\vec{r}+dx\,\vec{e}_x+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)-\cancel{\vec{E}\left(\vec{r}+dx\,\vec{e}_x-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)}+\cancel{\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)}-\vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dx\,\vec{e}_x}{2}\right)+\ldots\right]$$

Beim kleinsten Wert von x schreibe

$$d\vec{r}_y\cdot\left[-\vec{E}(\vec{r}_{min})\right] = -d\vec{r}_y\cdot\vec{E}(\vec{r}_{min})$$

Nehme letztendlich Limes $dx, dy \to 0$ $\Rightarrow$ $\square$.

Anwendung

Sei die Oberfläche flach, d.h. $d\vec{A}(\vec{r}) \uparrow\uparrow \vec{n}_c \quad \forall\, \vec{r}$.

Oberflächeninhalt:

$$A = \int_S d\vec{A}\cdot\vec{n}_c$$
$$= \frac{1}{2}\int_S d\vec{A}\cdot 2\vec{n}_c \qquad \Big|\; 2\vec{n}_c = \nabla\times(\vec{n}_c\times\vec{r}) \quad \text{(Seite 13)}$$
$$= \frac{1}{2}\int_S d\vec{A}\cdot\nabla\times(\vec{n}_c\times\vec{r})$$
$$\overset{\text{Stokes}}{=} \frac{1}{2}\int_{\partial S} d\vec{r}\cdot(\vec{n}_c\times\vec{r}) \overset{\text{Seite 9}}{=} \frac{\vec{n}_c}{2}\cdot\int_{\partial S}\vec{r}\times d\vec{r} \quad ! \qquad \text{(vgl. Seite 21)}$$

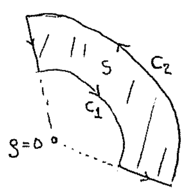
Beispiele

* Kreis vom Radius R.

Seite 27 $\Rightarrow$ $\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$; $\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & 0 \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = R^2\vec{e}_z$

$$A = \frac{\vec{e}_z}{2}\cdot\int_{\partial S}\vec{r}\times d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\, R^2 = \underline{\underline{\pi R^2}}\,.$$

* Sei $\vec{B} := \underbrace{\frac{j}{\rho}}_{B_\varphi}\vec{e}_\varphi$ in Zylinderkoordinaten $\Rightarrow$ $\nabla\times\vec{B} \overset{\text{Seite 29}}{=} \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \underbrace{\rho B_\varphi}_{\text{konstant!}} & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$



$$\Rightarrow 0 = \int_S d\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{C_1} d\vec{r}\cdot\vec{B} + \int_{C_2} d\vec{r}\cdot\vec{B} + \int_{\text{Radialstrecken}} d\vec{r}\cdot\vec{B}$$

Auf Radialstrecken gilt $d\vec{r}\cdot\vec{B} = 0$

$$\Rightarrow \int_{C_2} d\vec{r}\cdot\vec{B} = -\int_{C_1} d\vec{r}\cdot\vec{B}$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} |d\vec{r}|\,B_\varphi = \int_{C_1} |d\vec{r}|\,B_\varphi$$

„Dieselbe Zirkulation entlang jedes Kreisbogens".