2.8 Gaußscher Satz, Stokesscher Satz [Lang & Pucker 9.1-3]

Hauptsatz in einer Dimension (MMPI): $\int_a^b dx\, F'(x) = F(b) - F(a)$.

Linienintegral (Kap. 2.5 / Seite 20): $\int_{\vec r_a}^{\vec r_b} d\vec r \cdot \nabla\phi = \phi(\vec r_b) - \phi(\vec r_a)$.

Es geht jetzt um die Verallgemeinerung dieser Sätze auf Oberflächen- bzw. Volumenintegrale.

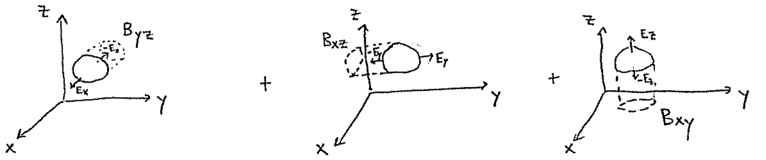
Hintergrund

Betrachte das Integral

$$I = \int_V dV\, \nabla\cdot\vec E = \int_{B_{yz}} dy\,dz \int_{\chi_-(y,z)}^{\chi_+(y,z)} dx\, \partial_x E_x + \int_{B_{xz}} dx\,dz \int_{\psi_-(x,z)}^{\psi_+(x,z)} dy\, \partial_y E_y + \int_{B_{xy}} dx\,dy \int_{\zeta_-(x,y)}^{\zeta_+(x,y)} dz\, \partial_z E_z ,$$

wobei wir uns der Freiheit der Integrationsreihenfolge bedient haben (Seite 26). Bei jedem Beitrag kann der Hauptsatz verwendet werden. Graphisch:

I =

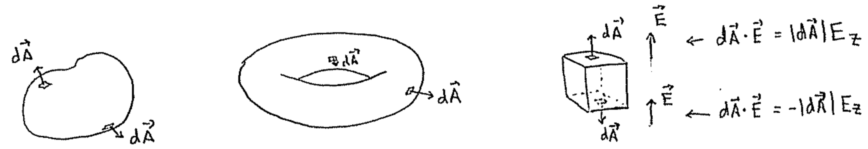


$$\int_{B_{yz}} dy\,dz \left[E_x(\chi_+,y,z) - E_x(\chi_-,y,z) \right] + \int_{B_{xz}} dx\,dz \left[E_y(x,\psi_+,z) - E_y(x,\psi_-,z) \right] + \int_{B_{xy}} dx\,dy \left[E_z(x,y,\zeta_+) - E_z(x,y,\zeta_-) \right]$$

Der erste Term liegt jeweils auf der „oberen" Oberfläche und zeigt „nach oben" (weil mit Plus-Zeichen); der zweite Term liegt auf der „unteren" Oberfläche und zeigt „nach unten" (weil mit Minus-Zeichen).

Definition

Sei $d\vec A$ ein Oberflächenelement (im Sinne von Kap. 2.6 / Seite 23), welches immer „nach außen" zeigt:



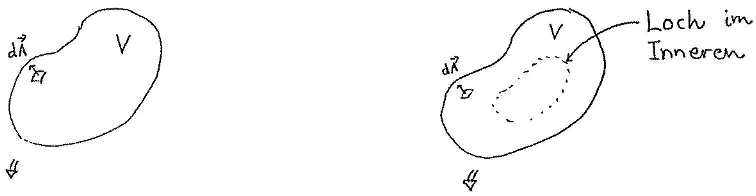
Gaußscher Satz

Wenn $d\vec A$ wie oben definiert ist, dann gilt:

$$\boxed{\int_V dV\, \nabla\cdot\vec E = \int_{\partial V} d\vec A\cdot\vec E}$$

„Divergenz ↔ Flußintegral"

Die Oberfläche ∂V ist der Rand des Volumens V.

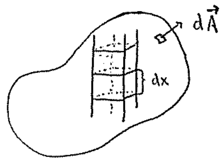


∂V ist eine zusammenhängende abgeschlossene Oberfläche.

∂V besteht aus zwei disjunkten Oberflächen.

Begründung

Schneide Volumen in kleine Quader.



Für jeden Quader gilt (Seite 12):

$$\nabla\cdot\vec E \approx \frac{1}{dx}\left[E_x\left(\vec r+\frac{dx\,\vec e_x}{2}\right) - E_x\left(\vec r-\frac{dx\,\vec e_x}{2}\right)\right] + (x\leftrightarrow y) + (x\leftrightarrow z) \qquad \Big|\times dx\,dy\,dz$$

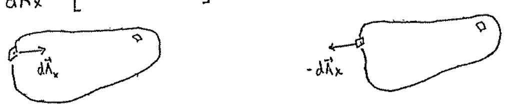
$$\Rightarrow \quad dV\,\nabla\cdot\vec E = d\vec A_x\cdot\left[\vec E\left(\vec r+\frac{dx\,\vec e_x}{2}\right) - \vec E\left(\vec r-\frac{dx\,\vec e_x}{2}\right)\right] + (x\leftrightarrow y) + (x\leftrightarrow z)\,.$$

Summiere über Quader! Die linke Seite wird zum $\sum_{\vec r} dV\,\nabla\cdot\vec E$.
Auf der rechten Seite kürzen sich alle Beiträge vom Innen:

$$d\vec A_x\cdot\left[\dots + \vec E\left(\vec r+dx\,\vec e_x+\frac{dx\,\vec e_x}{2}\right) - \cancel{\vec E\left(\vec r+dx\,\vec e_x-\frac{dx\,\vec e_x}{2}\right)} + \cancel{\vec E\left(\vec r+\frac{dx\,\vec e_x}{2}\right)} - \vec E\left(\vec r-\frac{dx\,\vec e_x}{2}\right) + \dots\right]$$

Auf der „unteren" Oberfläche schreibe

$$d\vec A_x\cdot\left[-\vec E(\vec r_{min})\right] = -d\vec A_x\cdot\vec E(\vec r_{min})$$



Nehme letztendlich Limes $dx, dy, dz \to 0$ $\Rightarrow$ $\square$.

Anwendung

Das Volumen eines Körpers:

$$V = \int_V dV = \frac{1}{3}\int_V dV\cdot 3 = \frac{1}{3}\int_V dV\,\nabla\cdot\vec r \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{3}\int_{\partial V} d\vec A\cdot\vec r \quad !$$

$\Big|\ 3 \overset{!}{=} \nabla\cdot\vec r$ (Seite 12)

Beispiele

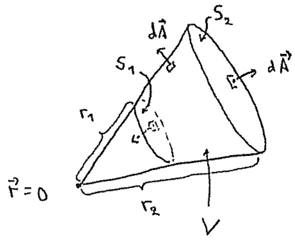
* Kugel vom Radius R.
Seite 28 $\Rightarrow$ $d\vec A = d\theta\,d\varphi\;\partial_\theta\vec r\times\partial_\varphi\vec r = d\theta\,d\varphi\;h_\theta h_\varphi\;\vec e_\theta\times\vec e_\varphi = d\theta\,d\varphi\;r^2\sin\theta\;\vec e_r$

$$V = \frac{1}{3}\int_{\partial V} d\vec A\cdot\vec r = \frac{1}{3}\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\;R^2\sin\theta\;\underbrace{\vec e_r\cdot\vec r}_{r=R} = \frac{2\pi}{3}R^3\int_0^\pi d\theta\;\sin\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}R^3\int_{-1}^{+1}dz = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}R^3}}\,.$$

$z = \cos\theta$
$dz = -\sin\theta\,d\theta$

* Sei $\vec E = q\,\dfrac{\vec r}{r^3} = \underbrace{\dfrac{q}{r^2}}_{E_r}\,\vec e_r \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec E \overset{\text{Seite 29}}{=} \dfrac{1}{r^2}\,\partial_r\left(r^2E_r\right) = 0$



$$\Rightarrow \quad 0 = \int_V dV\,\nabla\cdot\vec E \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{S_2} d\vec A\cdot\vec E + \int_{S_1} d\vec A\cdot\vec E + \int_{\text{Seitenwände}} d\vec A\cdot\vec E$$

Auf Seitenwänden gilt $d\vec A\cdot\vec E = 0$

$$\Rightarrow \quad \int_{S_2} d\vec A\cdot\vec E = -\int_{S_1} d\vec A\cdot\vec E$$

$$\Rightarrow \quad \int_{S_2} |d\vec A|\,E_r = \int_{S_1} |d\vec A|\,E_r$$

„Derselbe Fluß durch jede Kugeloberfläche".