2.7 Krummlinige Koordinaten [Lang & Pucker 8.1-3]

Im Kap. 2.6 (Seiten 25, 26) haben wir gelernt, wie in Flächen- bzw. Volumenintegralen eine Variablentransformation von „kartesischen" zu „krummlinigen" Koordinaten durchgeführt werden kann:

$$\int_B dx\,dy\ \phi = \int_B du\,dv \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \phi \ ; \quad \int_V dx\,dy\,dz\ \phi = \int_V du\,dv\,dw \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|}_{\text{Jacobi-Determinante}} \phi \ .$$

Einige besonders wichtige Beispiele:

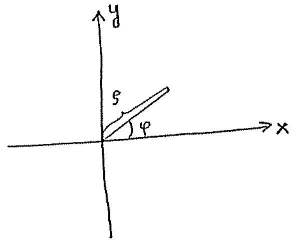
Zwei Dimensionen

* Polarkoordinaten (Seite 25)

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

$\rho \geq 0 \ ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

$dx\,dy \to \rho\, d\rho\, d\varphi$

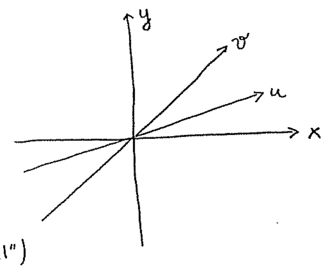


* „Schiefwinklige Achsen"

$$u = \alpha x + \beta y$$
$$v = \gamma x + \delta y$$

Schreibe: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.
(„nicht parallel")



Es folgt: $dx\,dy = du\,dv \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = du\,dv\,|\det M^{-1}|$

$$= du\,dv \frac{1}{|\det M|} = \frac{du\,dv}{|\alpha\delta - \beta\gamma|}$$

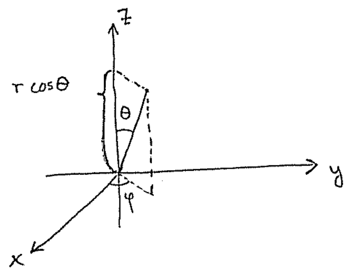
Drei Dimensionen

Θ wird häufig als ϑ geschrieben, und φ als ϕ.

* Kugelkoordinaten

$$\begin{cases} x = r \sin\Theta \cos\varphi \\ y = r \sin\Theta \sin\varphi \\ z = r \cos\Theta \end{cases}$$

$r \geq 0 ; \ 0 \leq \Theta \leq \pi \ ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

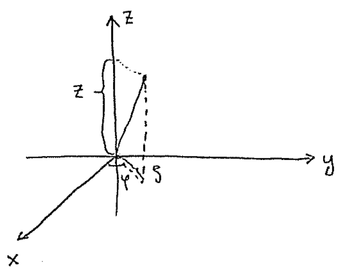


Es folgt (Aufgabe 2.3):

$dx\,dy\,dz \to r^2 dr \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$.

* Zylinderkoordinaten

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$



Es folgt (wie bei Polarkoordinaten):

$dx\,dy\,dz \to \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Das Ziel jetzt ist, die krummlinigen Koordinaten auch bei Ableitungen benutzen zu können. (Differenzierung und Integration sind letztendlich auch in drei Dimensionen miteinander verwandt $\mapsto$ Kap. 2.8.)

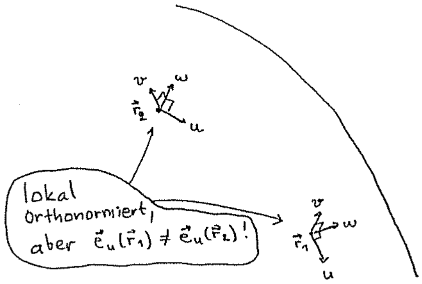
Ausgangspunkt: $\vec{r} = \vec{r}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$.

„Tangentenvektoren" (vgl. Seiten 23, 26): $\partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}, \partial_w \vec{r}$.

Seien jetzt $h_u := |\partial_u \vec{r}|$, $h_v := |\partial_v \vec{r}|$, $h_w := |\partial_w \vec{r}|$,

und $\vec{e}_u := \frac{1}{h_u}\partial_u \vec{r}$ usw, so daß $|\vec{e}_u| = 1$ gilt.

Falls die Tangentenvektoren auch orthogonal sind (welches z.B. bei „schiefwinkligen Achsen" nicht unbedingt der Fall ist), und (u,v,w) zweckmäßig permutiert worden sind, steht uns eine lokal orthonormierte rechtshändige Basis zur Verfügung:



$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = \vec{e}_u \cdot \vec{e}_w = \vec{e}_v \cdot \vec{e}_w = 0 ,$$

$$\vec{e}_u \times \vec{e}_v = \vec{e}_w , \quad \vec{e}_v \times \vec{e}_w = \vec{e}_u , \quad \vec{e}_w \times \vec{e}_u = \vec{e}_v .$$

Wir möchten ∇, $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ in dieser Basis ausdrücken!

Nabla

$\nabla \Phi$ als „abstrakter Vektor" ist parametrisierungsunabhängig; die Komponenten in einer bestimmten Basis können mittels Skalarprodukte mit Basisvektoren heraus projiziert werden:

$$(\nabla \Phi)_u = \vec{e}_u \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{h_u} \underbrace{\partial_u \vec{r} \cdot \nabla \Phi}_{\text{Seite 4: } \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}}$$

$$= \frac{1}{h_u}\frac{\partial \Phi}{\partial u} .$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla = \vec{e}_u \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \vec{e}_v \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \vec{e}_w \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}} .$$

Beispiel: In Kugelkoordinaten (Seite 27) gilt

$$\partial_r \vec{r} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow h_r = \sqrt{\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta} = 1$$

$$\partial_\theta \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \cos\varphi \\ r\cos\theta \sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow h_\theta = r$$

$$\partial_\varphi \vec{r} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \sin\varphi \\ r\sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_\varphi = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} .$$