Bei den Beispielen von Seite 24 hatten wir schon verschiedene Koordinatenwahlen getroffen, die den Symmetrien des vorhandenen Problems geeignet waren. Die Regeln einer Koordinatentransformation können kurz durch den Begriff der Jacobi-Determinanten zusammengefasst werden.

Satz: Sei die Oberfläche zuerst in kartesischen Koordinaten parametrisiert:

$$I = \int_S |d\vec{A}|\,\phi = \int_B dx\,dy\ \tilde{\phi}(x,y)\ , \qquad \text{mit } \tilde{\phi} = |\partial_x\vec{r}\times\partial_y\vec{r}|\,\phi .$$

In einem anderen Koordinatensystem (u,v) gilt dann

$$I = \int_B du\,dv\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\ \tilde{\phi}(x(u,v),y(u,v))\ ,$$

wobei

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

die 2×2 Jacobi-Determinante heißt.

Beweis: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ 0 \end{pmatrix}$; $\partial_u\vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_u x \\ \partial_u y \\ 0 \end{pmatrix}$; $\partial_v\vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_v x \\ \partial_v y \\ 0 \end{pmatrix}$;

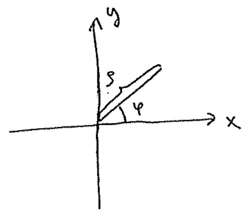
Weil wir schon im Bereich B liegen.

$$\partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_u x & \partial_u y & 0 \\ \partial_v x & \partial_v y & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z\,(\partial_u x\,\partial_v y - \partial_v x\,\partial_u y) = \vec{e}_z \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \square$.

Anwendung: Polarkoordinaten (wie schon auf Seite 24)

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

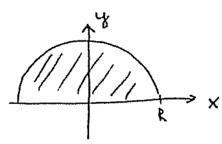


$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

$$\Rightarrow \quad dx\,dy \to \rho\,d\rho\,d\varphi$$

Beispiele:

* Fläche eines Halbkreises (vgl. Seite 22):



$$A = \int_S |d\vec{A}| = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} d\rho\ \rho = \pi\cdot\frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2} .$$

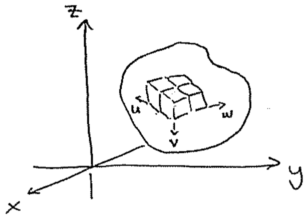
* $$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} = ?$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-y^2} = \int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\ e^{-x^2-y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho\ \rho\ e^{-\rho^2} \overset{z=\rho^2}{=} \pi\cdot\int_0^{\infty} dz\, e^{-z} = \pi\left[-e^{-z}\right]_0^{\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{\pi}\ !$$

Letztendlich definieren wir ein <u>Volumenintegral</u>.
Die Ortsvektoren des Körpers werden durch <u>drei</u> Koordinaten parametrisiert: $\vec{r}(u,v,w)$.
Wenn die Koordinaten nicht parallel laufen, ist $\partial_u\vec{r} \nparallel \partial_v\vec{r} \nparallel \partial_w\vec{r} \nparallel \partial_u\vec{r}$, und $\partial_u\vec{r}\cdot(\partial_v\vec{r}\times\partial_w\vec{r}) \neq 0$ (vgl. Kap. 2.2 / Seite 9).



<u>Definition:</u> Ein Volumenelement $dV \in \mathbb{R}_+$ wird durch das Spatprodukt definiert:

$$dV := du\,dv\,dw\,\left|\partial_u\vec{r}\cdot(\partial_v\vec{r}\times\partial_w\vec{r})\right| .$$

<u>Definition:</u> <u>Volumenintegrale</u> sind bestimmte Integrale (im Sinne vom Kap. 2.5 / Seite 22, verallgemeinert zu drei Dimensionen) über die Koordinaten u,v,w mit dem „Maß" dV, z.B.

$$\int_V dV\,\phi\,, \quad \int_V dV\,\vec{E}\,.$$

<u>Bemerkungen:</u>

* Geometrische Bedeutung des Spatproduktes (Seite 9)
$\Rightarrow$ $\int_V dV$ ermittelt das Volumen des Körpers.

* In kartesischen Koordinaten $(u\to x,\ v\to y,\ w\to z)$:

$$\left|\partial_x\vec{r}\cdot(\partial_y\vec{r}\times\partial_z\vec{r})\right| = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} \quad ; \quad dV = dx\,dy\,dz =: d^3\vec{r}\,.$$

* Wie in zwei Dimensionen (Seite 22) spielt die Ordnung der Integrationen keine Rolle:

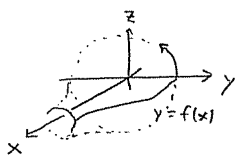
$$\int_{z_a}^{z_b} dz \int_{\psi_a(z)}^{\psi_b(z)} dy \int_{\chi_a(y,z)}^{\chi_b(y,z)} dx\,\phi(x,y,z) = \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{\xi_a(x)}^{\xi_b(x)} dy \int_{\zeta_a(x,y)}^{\zeta_b(x,y)} dz\,\phi(x,y,z)\,.$$

* Explizit ausgedrückt:

$$\partial_u\vec{r}\cdot(\partial_v\vec{r}\times\partial_w\vec{r}) = \begin{vmatrix}\partial_u x & \partial_u y & \partial_u z\\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z\\ \partial_w x & \partial_w y & \partial_w z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\partial_u x & \partial_v x & \partial_w x\\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y\\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z\end{vmatrix} =: \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

„3x3 Jacobi-Determinante"

<u>Beispiel:</u> Die Kurve $y = f(x) > 0$ drehe sich um die x-Achse:



Das Volumen des Drehkörpers beträgt

$$V = \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y^2+z^2\leq f^2(x)} dy\,dz = \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{-f(x)}^{f(x)} dy \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{+\sqrt{f^2(x)-y^2}} dz$$

$$= 2\int_{x_a}^{x_b} dx \int_{-f(x)}^{f(x)} dy\,\sqrt{f^2(x)-y^2} = 2\int_{x_a}^{x_b} dx\,\frac{\pi f^2(x)}{2} = \int_{x_a}^{x_b} dx\,\pi f^2(x)\,.$$

Seite 22