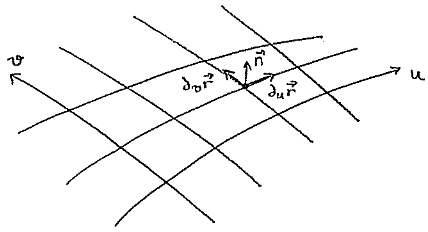
2.6 Oberflächenintegral, Volumenintegral

[Lang & Pucker 7.3]

Betrachtet wird eine allgemeine Oberfläche $\in \mathbb{R}^3$.
Die Ortsvektoren der Oberfläche können durch zwei Koordinaten parametrisiert werden: $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.



Sowohl $\vec{r}(u,v)$ als auch $\vec{r}(u+du, v)$ sind auf der Oberfläche

$\Rightarrow \partial_u \vec{r}$ ist ein Tangentenvektor der Oberfläche.

Dasselbe gilt für $\partial_v \vec{r}$.
Außerdem besitzt die Oberfläche einen Normalvektor, $\vec{n}$; $\vec{n} \cdot \partial_\mu \vec{r} = \vec{n} \cdot \partial_v \vec{r} = 0$.

Definition: Ein vektorielles Flächenelement ist ein Vektor

$$d\vec{A} := du\,dv\; \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} .$$

Aus den Eigenschaften des Vektorproduktes (Kap. 2.2 / Seite 8) folgt:

$$d\vec{A} \parallel \vec{n} \; ; \quad |d\vec{A}| = du\,dv * (\text{Fläche des von } \partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r} \text{ gebildeten Parallelogramms})$$

Definition: Oberflächenintegrale sind Flächenintegrale (im Sinne von Kap. 2.5 / Seite 22) über die Koordinaten u, v mit dem „Maß" $d\vec{A}$, z. B.

$$\int_S |d\vec{A}|\, \phi \;, \quad \int_S d\vec{A}\, \phi \;, \quad \int_S d\vec{A} \cdot \vec{E} \;, \quad \int_S d\vec{A} \times \vec{E} .$$

Bei einer abgeschlossenen Oberfläche wird die Notation $\oint_S$ benutzt.

Bemerkungen:

* $\int_S |d\vec{A}|$ ermittelt den Oberflächeninhalt.

* $\left| \int_S d\vec{A} \cdot \vec{n} \right|$ ermittelt ebenso den Oberflächeninhalt, weil $d\vec{A} \parallel \vec{n}$ gilt. (Solange $\partial_u \vec{r} \nparallel \partial_v \vec{r}$ gilt, d.h. die Koordinaten nicht parallel laufen, kann $d\vec{A} \cdot \vec{n}$ sein Vorzeichen nicht ändern.)

* Integrale der Form $\int_S d\vec{A} \cdot \vec{E}$ werden „Flußintegrale" genannt, und spielen eine wichtige Rolle in der Elektro- und Hydrodynamik.

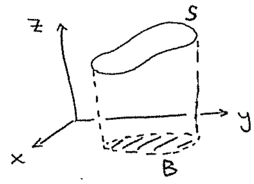
* Sei die Oberfläche die Ebene $z = 0$, und wähle x, y als Koordinaten

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \partial_x \vec{r} = \vec{e}_x \; ; \quad \partial_y \vec{r} = \vec{e}_y \; ; \quad d\vec{A} = dx\,dy\; \vec{e}_x \times \vec{e}_y = dx\,dy\; \vec{e}_z .$$

D.h. $\int_S |d\vec{A}|\, \phi = \int_B dx\,dy\; \phi$ ist ein normales Flächenintegral. (Seite 22)

Beispiele:

* Oberfläche der Form $z = f(x,y)$:



$$\vec{r} = (x, y, f(x,y))$$

$$\partial_x \vec{r} = (1, 0, \partial_x f)$$

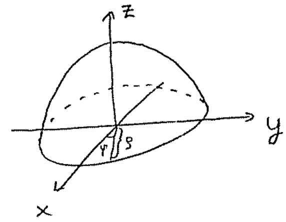
$$\partial_y \vec{r} = (0, 1, \partial_y f)$$

$$\partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 0 & \partial_x f \\ 0 & 1 & \partial_y f \end{vmatrix} = \vec{e}_x (-\partial_x f) + \vec{e}_y (-\partial_y f) + \vec{e}_z$$

$$|\partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r}| = \sqrt{(-\partial_x f)^2 + (-\partial_y f)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \int_S |d\vec{A}| \, \phi = \int_B dx\,dy \, \phi(x,y,f(x,y)) \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2} \, .$$

* Bestimmung des Oberflächeninhalts einer Halbkugel :



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad z = + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Sei $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$

(„Polarkoordinaten")

$$\Rightarrow \vec{r} = \left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \sqrt{R^2-\rho^2}\right)$$

$$\partial_\rho \vec{r} = \left(\cos\varphi, \sin\varphi, -\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)$$

$$\partial_\varphi \vec{r} = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$$

$$\Rightarrow \partial_\rho \vec{r} \times \partial_\varphi \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

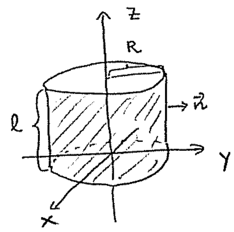
$$= \vec{e}_x \left(\frac{\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right) + \vec{e}_y \left(\frac{\rho^2 \sin\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right) + \vec{e}_z \, \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \, |\partial_\rho \vec{r} \times \partial_\varphi \vec{r}|$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \sqrt{\frac{\rho^4}{R^2-\rho^2} + \rho^2} = 2\pi \int_0^R d\rho \, \rho R \frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \overset{z=\rho^2}{=} \pi R \int_0^{R^2} \frac{dz}{\sqrt{R^2-z}} = 2\pi R \left[-\sqrt{R^2-z}\right]_0^{R^2}$$

$$= \underline{\underline{2\pi R^2}} \, .$$

* $\int_S d\vec{A} \cdot \vec{r}$ über einen Zylindermantel :



Parametrisiere Mantel durch $z \in [0,\ell]$, $\varphi \in (0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \vec{r} = (x,y,z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$$

$$\partial_\varphi \vec{r} = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$$

$$\partial_z \vec{r} = (0, 0, 1)$$

$$\partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_x (R\cos\varphi) + \vec{e}_y (R\sin\varphi)$$

$$d\vec{A} \cdot \vec{r} = d\varphi\, dz \left(\partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r}\right) \cdot \vec{r} = d\varphi\, dz \left(R^2\cos^2\varphi + R^2 \sin^2\varphi\right) = R^2 \, d\varphi \, dz$$

$$\int_S d\vec{A} \cdot \vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\ell} dz \, R^2 = \underline{\underline{2\pi R^2 \ell}} \, .$$

— o —