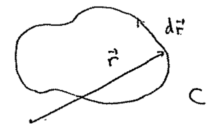
Wir hatten bis jetzt Linienintegrale mit stets einem reellen Wert, sowohl bei einem skalaren ($\int_C |d\vec r| f$) als auch bei einem vektorwertigen ($\int_C d\vec r \cdot \vec E$) Integrand. Linienintegrale können aber auch selbst Vektoren sein, z.B. als $\int_C d\vec r\, f$ oder als $\int_C d\vec r \times \vec E$, wobei immer $\int_C d\vec r$ als $\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d\vec r}{dt}$ zu interpretieren ist.
Wir betrachten jetzt genauer den zweiten Fall, weil dieser uns schon in die Richtung von Flächenintegralen führt.

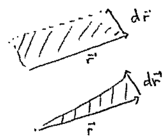
Behauptung: Sei C eine geschlossene Kurve in der Ebene $z=0$. Dann ist $\vec A := -\frac{1}{2}\oint_C d\vec r \times \vec r$ ein Vektor, dessen Richtung senkrecht auf die Ebene ist, und dessen Betrag gleich der von C eingeschlossenen Fläche ist.



Beweis: Kap 2.2 / Seite 8:

$\vec r \times d\vec r$ = Fläche eines Parallelogramms

$\frac{1}{2}\vec r \times d\vec r$ = —— " —— Dreiecks

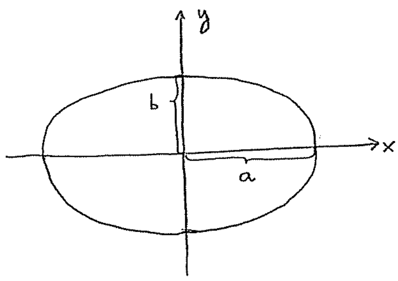


Richtung senkrecht & rechtshändig (nach oben)

Der Teil $\vec r \searrow d\vec r$ zeigt nach unten und wird subtrahiert, d.h. nur die eingeschlossene Fläche bleibt übrig!

Schreibe letztendlich $\vec r \times d\vec r = -\, d\vec r \times \vec r \quad \Rightarrow \quad \Box$.

Beispiel: Die Fläche einer Ellipse:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \vec r = (a\cos\varphi,\ b\sin\varphi,\ 0)$$

$$\frac{d\vec r}{d\varphi} = (-a\sin\varphi,\ b\cos\varphi,\ 0)$$

$$\frac{d\vec r}{d\varphi} \times \vec r = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ -a\sin\varphi & b\cos\varphi & 0 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \vec e_z\left(-ab\sin^2\varphi - ab\cos^2\varphi\right) = -ab\,\vec e_z$$

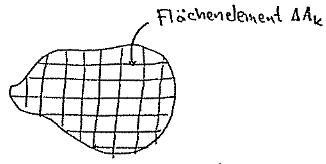
$$\Rightarrow \quad \vec A = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\ \frac{d\vec r}{d\varphi} \times \vec r = \frac{ab}{2}\vec e_z \int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{\pi ab\, \vec e_z}$$

—— ∘ ——

Jetzt „ordentliche" Flächenintegrale; wie bei Linienintegralen fangen wir mit „normalen" bestimmten Integralen an, verallgemeinern aber dann den Begriff (im Kap. 2.6) so, dass das Integral unabhängig von der Parametrisierung (d.h. „geometrisch") ist.

Definition: Ein Flächenintegral über einen Bereich $B \in \mathbb{R}^2$ kann als

$$\int_B dA\, f(\vec{x}) := \lim_{\Delta A_k \to 0} \sum_{k=1}^{k_{max}} \Delta A_k f(\vec{x}_k)$$



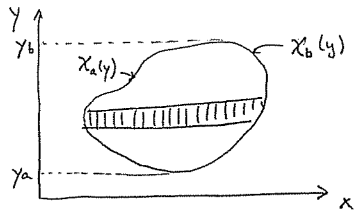
definiert werden (angenommen dass der Limes existiert und eindeutig ist).

Bemerkungen:

* $f = 1 \Rightarrow \int_B dA = \sum_{k=1}^{k_{max}} \Delta A_k = A =$ Fläche.

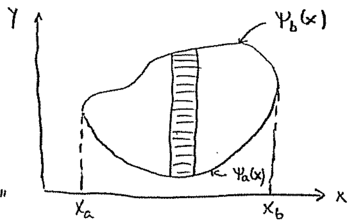
* Verfeinerung zuerst in x-Richtung, nachher in y-Richtung:

$$\int_B dA\, f = \int_{y_a}^{y_b} dy \left\{ \int_{x_a(y)}^{x_b(y)} dx\, f(x,y) \right\}.$$



Umgekehrt:

$$\int_B dA f = \int_{x_a}^{x_b} dx \left\{ \int_{y_a(x)}^{y_b(x)} dy\, f(x,y) \right\}.$$



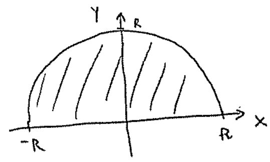
D.h. ein Flächenintegral kann als „Iteration" von normalen 1-dimensionalen Integralen betrachtet werden!

Beispiele:

* Fläche eines Halbkreises:

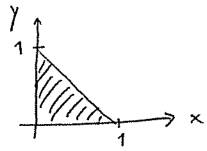
$y_a(x) = 0$

$y_b(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ (d.h. $x^2 + y_b^2 = R^2$)



$$\Rightarrow A = \int_{-R}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^{R} dx \sqrt{R^2 - x^2} \underset{\substack{x = R\sin\varphi \\ dx = R\cos\varphi\, d\varphi}}{=} R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi \sqrt{1-\sin^2\varphi} = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2\varphi = \frac{\pi R^2}{2}.$$

* $\int_B dA\, y$; B das von den Geraden $x=0$, $y=0$ und $x+y=1$ eingeschlosse Dreieck:



(a) zuerst y-Richtung:

$$\int_B dA\, y = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, y = \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, (1-x)^2 = -\frac{1}{6}\left[(1-x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(b) zuerst x-Richtung:

$$\int_B dA\, y = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx\, y = \int_0^1 dy\, y\, [x]_0^{1-y} = \int_0^1 dy\, (y - y^2) = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$