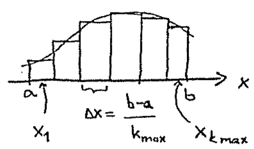
2.5 Linienintegral, Flächenintegral [Lang & Pucker 7.2, 4.4 (5.4)]

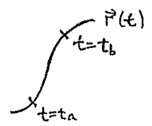
Zur Erinnerung (MMPI, Kap. 2.6): ein (bestimmtes) Integral $\hat{=}$ eine Summe

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{k_{max}} \Delta x\, f(x_k)$$



In drei Dimensionen kann sowohl der Integrationsbereich

als auch der Integrand (Skalarfeld, Vektorfeld) komplizierter sein als in einer Dimension: wie bei Ableitungen gibt es viele Varianten zur Integration. Wir betrachten zuerst Integration entlang einer Raumkurve $\vec{r}(t)$:



Definition: Im Zeitintervall dt bewegt sich der Massenpunkt den Abstand $|\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)| \overset{\text{Taylor}}{\approx} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$. Die Bogenlänge zwischen t_a und t_b wird als

$$s := \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{\sum_k \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2}$$

definiert. (Dies ist ein normales bestimmtes Integral!)

Definition: Ein Linienintegral von einem skalaren Feld f entlang der Kurve C wird durch

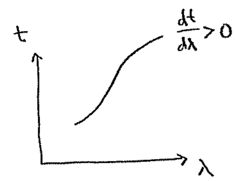
$$\int_C |d\vec{r}|\, f(\vec{r}) := \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}(t))$$

gegeben.

Behauptung: Das Linienintegral ist unabhängig von der Parametrisierung, d.h. man kann statt t auch einen anderen Parameter, λ, benutzen, solange die Beziehung $t \leftrightarrow \lambda$ differenzierbar und invertierbar ist.

Beweis: (a) MMPI, Kap. 2.8 (Substitution der Variablen):

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}(t)) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda\, \frac{dt}{d\lambda} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}(t(\lambda)))$$



(b) MMPI, Kap. 2.1 (Kettenregel): $\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\lambda} = \frac{d\vec{r}}{d\lambda}$.

$$\Rightarrow \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}) \overset{(a)\&(b)}{=} \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \left|\frac{d\vec{r}}{d\lambda}\right| f(\vec{r}) \qquad \square.$$

Bemerkung: Die Bogenlänge (d.h. ein Linienintegral mit $f(\vec{r}) := 1$) kann auch als

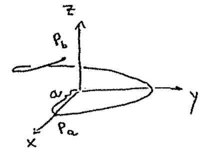
$$s = \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}}_{=: \vec{e}_v} = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{e}_v$$

(vgl. Aufgabe 4.3)

ausgedrückt werden. Die Form $\int_C d\vec{r} \cdot \vec{E}$ des Linienintegrals wird als „Arbeitsintegral" bezeichnet und taucht häufig bei vektorwertigen Integranden auf.

Beispiele: (a) Bogenlänge einer Schraubenlinie,

$\vec{r}(\varphi) = (a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ b\varphi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$:



$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi + b^2} = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

(b) Linienintegral $\int_C d\vec{r}\cdot\vec{E}$ entlang der Schraubenlinie,

für den Fall $\vec{E} := c\left(\frac{x\,\vec{e}_x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\,\vec{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + d\,\vec{e}_z$:

$$\vec{r}(\varphi) = (a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ b\varphi)$$

$$\frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} = (-a\sin\varphi,\ a\cos\varphi,\ b)$$

$$\vec{E}(\vec{r}(\varphi)) = (c\cos\varphi,\ c\sin\varphi,\ d)$$

$$\Rightarrow \int_C d\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\cdot\vec{E}(\vec{r}(\varphi)) = \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \cancel{-ac\sin\varphi\cos\varphi + ac\cos\varphi\sin\varphi} + bd \right\}$$

$$= 2\pi b d.$$

Zur Erinnerung (MMP I, Kap. 2.6): Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$\int_a^b dx\, F'(x) = F(b) - F(a).$$

Dieser kann jetzt für Linienintegrale „verallgemeinert" werden.

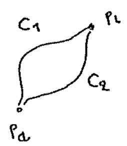
Behauptung: $\int_C d\vec{r}\cdot\nabla\phi = \phi(P_b) - \phi(P_a)$ wobei P_a, P_b die Endpunkte der Kurve C sind.

Beweis:

$$\int_C d\vec{r}\cdot\nabla\phi = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\nabla\phi(\vec{r}(t)) = \int_{t_a}^{t_b} dt \sum_k \frac{dx_k}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} \overset{\text{Kap. 2.1 / Seite 4}}{=} \int_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{d\phi(\vec{r}(t))}{dt}$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{=} \phi(\vec{r}(t_b)) - \phi(\vec{r}(t_a)) \quad \square.$$

Bemerkung: $\int_C d\vec{r}\cdot\nabla\phi$ ist <u>unabhängig von der Kurve C</u>, solange $\vec{r}(t_b)$ und $\vec{r}(t_a)$ festgehalten werden. Insbesondere: $\oint_C d\vec{r}\cdot\nabla\phi = 0$, wobei $\oint$ ein Integral über eine geschlossene Kurve bezeichnet!



Beispiel: $\vec{E}$ vom Beispiel (b) kann als $\vec{E} = \nabla\phi$ ausgedrückt werden, mit $\phi = c\sqrt{x^2+y^2} + d\,z$. Die Endpunkte sind $P_a = (a, 0, 0)$, $P_b = (a, 0, 2\pi b)$, und $\phi(P_b) - \phi(P_a) = ca + 2\pi bd - ca = 2\pi bd$.
