Anwendung: Vektorprodukte ohne Ableitungen (Seite 10)

* Beweis der Graßmann-Identität:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{e}_k\,\varepsilon_{k\ell m}\,a_\ell\,(\vec{b}\times\vec{c})_m$$

$$= \vec{e}_k\,\underbrace{\varepsilon_{k\ell m}\,\varepsilon_{mrs}}_{\varepsilon_{k\ell m}\varepsilon_{rsm} = \delta_{kr}\delta_{\ell s} - \delta_{ks}\delta_{\ell r}}\,a_\ell b_r c_s$$

$$= b_k\vec{e}_k\,a_\ell c_\ell - c_k\vec{e}_k\,a_\ell b_\ell = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\,.$$

* Beweis der Lagrange-Identität:

$$(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2) = \varepsilon_{k\ell m}\,a_{1\ell}a_{2m}\,\varepsilon_{krs}\,b_{1r}b_{2s}$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{\ell mk}\,\varepsilon_{rsk}}_{\delta_{\ell r}\delta_{ms} - \delta_{\ell s}\delta_{mr}}\,a_{1\ell}a_{2m}\,b_{1r}b_{2s}$$

$$= a_{1\ell}b_{1\ell}\,a_{2m}b_{2m} - a_{1\ell}b_{2\ell}\,a_{2m}b_{1m} = (\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1)(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2) - (\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2)(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1)$$

* Beweis der Jacobi-Identität:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{e}_k\Big\{\varepsilon_{k\ell m}\,a_\ell\,\varepsilon_{mrs}\,b_r c_s$$
$$+ \varepsilon_{k\underset{r}{\cancel{\ell}}m}\,b_{\underset{r}{\cancel{\ell}}}\,\varepsilon_{m\underset{s}{\cancel{r}}\underset{\ell}{\cancel{s}}}\,c_{\underset{s}{\cancel{r}}}\,a_{\underset{\ell}{\cancel{s}}}$$
$$+ \varepsilon_{k\underset{s}{\cancel{\ell}}m}\,c_{\underset{s}{\cancel{\ell}}}\,\varepsilon_{m\underset{\ell}{\cancel{r}}\underset{r}{\cancel{s}}}\,a_{\underset{\ell}{\cancel{r}}}\,b_{\underset{r}{\cancel{s}}}\Big\}$$

$$= \vec{e}_k\,a_\ell b_r c_s\,\{\varepsilon_{k\ell m}\varepsilon_{rsm} + \varepsilon_{krm}\varepsilon_{s\ell m} + \varepsilon_{ksm}\varepsilon_{\ell rm}\}$$

$$= \vec{e}_k\,a_\ell b_r c_s\,\{\varepsilon_{rsm}\varepsilon_{k\ell m} + \varepsilon_{krm}\varepsilon_{s\ell m} + \varepsilon_{skm}\varepsilon_{r\ell m}\}$$

fest

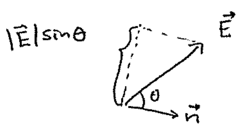
zyklisch: rs k kr s sk r $\Rightarrow 0!$

* Wichtig in der Strahlungstheorie:

$$(\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E}))\cdot\vec{n} = n_k\,\varepsilon_{k\ell m}\,E_\ell\,\varepsilon_{mrs}\,n_r E_s$$

$$= n_k E_\ell\, n_r E_s\,\underbrace{\varepsilon_{k\ell m}\varepsilon_{rsm}}_{\delta_{kr}\delta_{\ell s} - \delta_{ks}\delta_{\ell r}}$$

$$= |\vec{n}|^2|\vec{E}|^2 - (\vec{n}\cdot\vec{E})^2$$



$|\vec{n}| := 1$

$$\stackrel{\downarrow}{=} |\vec{E}|^2 - (\vec{n}\cdot\vec{E})^2 = |\vec{E}|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$= |\vec{E}|^2\sin^2\theta$$

= Betrag-Quadrat der „transversalen Komponente"
(bzgl. Richtung von $\vec{n}$)

Anwendung: Produktregel mit Vektorableitungen (Seite 14)

* $\nabla\cdot(\phi\vec{E}) = \partial_k(\phi E_k) = \partial_k\phi\, E_k + \phi\,\partial_k E_k = (\nabla\phi)\cdot\vec{E} + \phi\,\nabla\cdot\vec{E}$

* $\nabla\times(\phi\vec{E}) = \vec{e}_k\,\varepsilon_{klm}\,\partial_l(\phi E_m) = \vec{e}_k\,\varepsilon_{klm}\left(\partial_l\phi\, E_m + \phi\,\partial_l E_m\right)$
$= (\nabla\phi)\times\vec{E} + \phi\,\nabla\times\vec{E}$

* $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \partial_k\,\varepsilon_{klm}\,E_l B_m = \varepsilon_{klm}\left((\partial_k E_l) B_m + E_l\,\partial_k B_m\right)$
$= B_m\,\varepsilon_{klm}\,\partial_k E_l + \varepsilon_{klm}\,E_l\,\partial_k B_m$
$= \varepsilon_{mkl}\,B_m\,\partial_k E_l - \varepsilon_{lkm}\,E_l\,\partial_k B_m$
$= \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

* Behauptung: $\partial_j\left(\delta_{ij}\frac{\vec{B}^2}{2} - B_i B_j\right) = \left(\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})\right)_i$ falls $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ gilt.

Beweis: linke Seite: $\partial_i\left(\frac{B_k B_k}{2}\right) - \partial_j(B_i B_j)$

$= B_k\,\partial_i B_k - B_j\partial_j B_i - B_i\partial_j B_j$ ($j \to k$)

$= B_k\,\partial_i B_k - B_k\partial_k B_i - B_i\underbrace{(\nabla\cdot\vec{B})}_{0}$

rechte Seite: $\varepsilon_{ikl}\,B_k\,\varepsilon_{lmn}\,\partial_m B_n$

$= \underbrace{\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{mnl}}_{\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}}\,B_k\,\partial_m B_n = B_k\,\partial_i B_k - B_k\partial_k B_i$

OK!

* Behauptung: $-\frac{1}{2}\nabla\times(\vec{r}\times\vec{B}) = \vec{B}$ falls $\vec{B} = \text{const.}$

Beweis:

$-\frac{1}{2}\left(\nabla\times(\vec{r}\times\vec{B}_c)\right)_i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ikl}\,\partial_k\,\varepsilon_{lmn}\,x_m\,(B_c)_n$

$= -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{lmn}\,\underbrace{(\partial_k x_m)}_{\delta_{mk}}\,B_n$

$= +\frac{1}{2}\,\underbrace{\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{nkl}}_{2\delta_{in}}\,B_n = B_i$ $\square$.

* Behauptung: $\nabla\times\left(\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{\mu}\,r^2}{r^5}$ („Dipolfeld")

Beweis: $\nabla\times\left(\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{e}_k\,\varepsilon_{klm}\,\partial_l\,\varepsilon_{mns}\,\frac{\mu_n x_s}{r^3}$

$= \vec{e}_k\,(\delta_{kn}\delta_{ls} - \delta_{ks}\delta_{ln})\,\mu_n\,\partial_l\left(\frac{x_s}{r^3}\right)$; $\partial_l\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3x_l}{r^5}$ (Aufgabe 1.3)

$= \vec{e}_k\left(\mu_k\,\delta_{ls} - \mu_l\,\delta_{ks}\right)\left(\frac{\delta_{ls}}{r^3} - 3\,\frac{x_l x_s}{r^5}\right)$

$= \cancel{3\frac{\vec{\mu}}{r^3}} - \cancel{3\frac{\vec{\mu}}{r^3}} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} + 3\,\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}\;\vec{r}}{r^5}$ $\square$.

(1) (2) (3) (4)