2.4 Ableitungen in Komponentenform [Lang & Pucker 10.3-4]

Die Ergebnisse von Kapiteln 2.2, 2.3 (insbesondere die Formeln auf Seiten 10, 14) können am einfachsten hergeleitet werden, indem wir alles in „Komponentenform" ausdrücken; die Komponenten sind reelle Funktionen und folgen elementaren Regeln.

Bausteine:

* Kronecker-Symbol (MMP I, Kap. 3.2):

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases}$$

* Levi-Civita-Tensor (MMP I, Kap. 3.3):

$$\varepsilon_{jkl} = \begin{cases} 1, & \text{falls } jkl \text{ eine gerade Permutation von } 123 \text{ ist} \\ -1, & \text{—〃— ungerade —〃—} \\ 0, & \text{falls mindestens zwei Indizes übereinstimmen} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{jkl} = \delta_{1j}\delta_{2k}\delta_{3l} + \delta_{2j}\delta_{3k}\delta_{1l} + \delta_{3j}\delta_{1k}\delta_{2l} - \delta_{2j}\delta_{1k}\delta_{3l} - \delta_{3j}\delta_{2k}\delta_{1l} - \delta_{1j}\delta_{3k}\delta_{2l}.$$

(d.h. $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$).

Es gilt: $\det M = \sum_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} M_{i_1 1} M_{i_2 2} M_{i_3 3} = \sum_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} M_{1 i_1} M_{2 i_2} M_{3 i_3}$.

* Einstein-Konvention (MMP I, Kap. 4):

Über zwei gleichen Indizes wird summiert, d.h.

$$t_{\ldots j \ldots j \ldots} := \sum_{j=1}^{3} t_{\ldots j \ldots j \ldots}$$

(In MMP I / Kap. 4 war ein Index unten, ein oben; jetzt der Einfachheit halber beide unten.)

* Ein Summierungsindex kann immer umbenannt werden, d.h.

$$t_{\ldots j \ldots j \ldots} = t_{\ldots k \ldots k \ldots}$$

Es folgt:

* $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_k b_k$

* $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{jkl}\, \vec{e}_j a_k b_l = \varepsilon_{\underset{j}{k}\underset{k}{l}\underset{l}{j}}\, a_{\underset{j}{k}} b_{\underset{k}{l}} \vec{e}_{\underset{l}{j}} = \varepsilon_{jkl}\, a_j b_k \vec{e}_l$

* $\nabla\cdot\vec{E} = \partial_k E_k$

* $\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_j\, \varepsilon_{jkl}\, \partial_k E_l$

Wichtige Identitäten:

* $\delta_{ij} a_j = a_i$

  $\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$

  $\delta_{ii} = 3$ [im Allgemeinen: $\delta_{ii} = D =$ Raumdimension]

* $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{iik} = 0$

  gleiche Indizes

  $$\varepsilon_{ijk} a_i a_j = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ijk} a_i a_j + \varepsilon_{\underset{ji}{ijk}} \underset{j}{a_i} \underset{i}{a_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{jik} \right) a_i a_j = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{ijk} \right) a_i a_j = 0 .$$

  (d.h. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$)

* $$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \delta_{kn} = \boxed{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} . \qquad (*)$$

  Warum? $k=1$ $\Rightarrow$ man erhält etwas nur bei

  $\varepsilon_{231} \varepsilon_{231} = 1 \cdot 1 = +1$

  $\varepsilon_{231} \varepsilon_{321} = 1 \cdot (-1) = -1$

  $\varepsilon_{321} \varepsilon_{231} = (-1) \cdot 1 = -1$

  $\varepsilon_{321} \varepsilon_{321} = (-1)(-1) = +1$

  Diese stimmen mit $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ überein!

  Und so geht es auch mit $k = 2,3$.

  Oder explizit:

  $$\varepsilon_{ijk} = \delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} + \delta_{2i}\delta_{3j}\delta_{1k} + \delta_{3i}\delta_{1j}\delta_{2k} - \delta_{2i}\delta_{1j}\delta_{3k} - \delta_{3i}\delta_{2j}\delta_{1k} - \delta_{1i}\delta_{3j}\delta_{2k}$$

  $$\varepsilon_{lmk} = \delta_{1l}\delta_{2m}\delta_{3k} + \delta_{2l}\delta_{3m}\delta_{1k} + \delta_{3l}\delta_{1m}\delta_{2k} - \delta_{2l}\delta_{1m}\delta_{3k} - \delta_{3l}\delta_{2m}\delta_{1k} - \delta_{1l}\delta_{3m}\delta_{2k}$$

  Multipliziere $\Rightarrow$ 6×6 Terme, aber $\delta_{3k}\delta_{1k} = \delta_{31} = 0$ usw

  $$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{2i}\delta_{2l}\delta_{3j}\delta_{3m} - \delta_{2i}\delta_{2m}\delta_{3j}\delta_{3l} - \delta_{2j}\delta_{2l}\delta_{3i}\delta_{3m} + \delta_{2j}\delta_{2m}\delta_{3i}\delta_{3l}$$

  $$+ (\text{Terme aus } \delta_{2k}\delta_{2k}) + (\text{Terme aus } \delta_{3k}\delta_{3k})$$

  $$\overset{!}{=} (\delta_{1i}\delta_{1l} + \delta_{2i}\delta_{2l} + \delta_{3i}\delta_{3l})(\delta_{1j}\delta_{1m} + \delta_{2j}\delta_{2m} + \delta_{3j}\delta_{3m})$$

  $$- (\delta_{1i}\delta_{1m} + \delta_{2i}\delta_{2m} + \delta_{3i}\delta_{3m})(\delta_{1j}\delta_{1l} + \delta_{2j}\delta_{2l} + \delta_{3j}\delta_{3l})$$

  $$= \delta_{pi}\delta_{pl}\delta_{rj}\delta_{rm} - \delta_{pi}\delta_{pm}\delta_{rj}\delta_{rl}$$

  $$= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad \square .$$

* $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\delta_{jm}\delta_{kn} = \boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} =} \ \delta_{jm}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) = 3\delta_{il} - \delta_{il} = \boxed{2\delta_{il}} .$$

* $$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} =} \ 2\delta_{ii} = 2 \times 3 = \boxed{6} .$$

* $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} + \varepsilon_{jlk}\varepsilon_{imk} + \varepsilon_{lik}\varepsilon_{jmk} = 0$$ „Jacobi-Identität"

  fest

  Summierungsindex

  zyklisch permutiert

  Beweis: $(*) \Rightarrow$ $$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{ji}\delta_{lm} - \delta_{jm}\delta_{il} + \delta_{lj}\delta_{im} - \delta_{lm}\delta_{ij}$$

  $$= 0 \quad \square .$$

—— ∘ ——