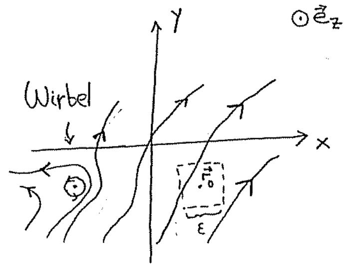
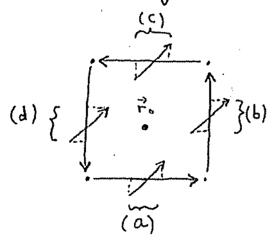
Die anschauliche („physikalische") Bedeutung der Rotation



Betrachte eine Strömung in einer Ebene $z = \text{const}$.
Wieviel „Wirbligkeit" weist die Strömung auf?

* Gehe um ein Viereck.
  Wieviel Strömung „kommt mit"?



$$(a) = j_x\left(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_y\right) \approx j_x - \tfrac{\varepsilon}{2}\partial_y j_x$$
$$(b) = j_y\left(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_x\right) \approx j_y + \tfrac{\varepsilon}{2}\partial_x j_y$$
$$(c) = -j_x\left(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_y\right) \approx -j_x - \tfrac{\varepsilon}{2}\partial_y j_x$$
$$(d) = -j_y\left(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_x\right) \approx -j_y + \tfrac{\varepsilon}{2}\partial_x j_y$$

Insgesamt: $\varepsilon\left(\partial_x j_y - \partial_y j_x\right) = \varepsilon\,(\nabla\times\vec{j})_z$!

* Bei Ebenen in anderen Richtungen erhält man $\varepsilon(\nabla\times\vec{j})_x$, $\varepsilon(\nabla\times\vec{j})_y$; im Allgemeinen $\varepsilon\,(\nabla\times\vec{j})\cdot\vec{n}$, wobei $\vec{n}$ der Normalvektor ist.

Eine Strömung mit der Eigenschaft $\nabla\times\vec{j} = \vec{0}$ heißt „wirbelfrei".

Beispiele (vgl. Seite 12):

* $\vec{j} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\nabla\times\vec{j} = \nabla\times(\vec{\omega}_c\times\vec{r})$$

halte $\vec{\omega}$ konstant; Ableitung operiert nur auf $\vec{r}$

Graßmann-Identität, Seite 10

$$= (\nabla\cdot\vec{r})\,\vec{\omega}_c - (\nabla\cdot\vec{\omega}_c)\,\vec{r} = \underbrace{(\nabla\cdot\vec{r})}_{3\ \text{(Seite 12)}}\,\vec{\omega}_c - (\vec{\omega}_c\cdot\nabla)\,\vec{r}$$

$$(\vec{\omega}\cdot\nabla)\,\vec{r} = \sum_k \omega_k \partial_k \sum_l x_l \vec{e}_l = \sum_k \omega_k \vec{e}_k = \vec{\omega}$$

δ_{kl}

$$\Rightarrow \quad \nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}\,.$$

* $\vec{j} = \vec{r}$

$$\nabla\times\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\,\underbrace{\left(\partial_y z - \partial_z y\right)}_{0} + \ldots = \vec{0}\,.$$

— · —

Doppelte Ableitungen

$$* \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla \cdot \nabla \phi =: \nabla^2 \phi =: \Delta \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi \, .$$

„Laplace-Operator" (Pierre-Simon Laplace 1749–1827)

$$* \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = \nabla \times \nabla \phi = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x \phi & \partial_y \phi & \partial_z \phi \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right) \phi + \ldots = \vec{0} \, .$$

partielle Ableitungen vertauschen miteinander, vgl. Seite 5.

„Poincaré-Lemma" (Henri Poincaré 1854–1912)

$$* \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{E} = 0 \, .$$

$$* \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \, .$$

Graßmann-Identität, Seite 10

Ableitungen von Produkten (Produktregel)

Eine nützliche Schreibweise (wie auf Seite 13): $\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg' = \frac{d}{dx}(f g_c + f_c g)$

„konstant"

Kombiniere diese jetzt mit den bekannten Regeln für Skalar- und Vektorprodukte:

$$* \quad \nabla \cdot (\phi \vec{E}) = \nabla \cdot (\phi_c \vec{E} + \phi \vec{E}_c) = \phi \, \nabla \cdot \vec{E} + (\nabla \phi) \cdot \vec{E}$$

$$* \quad \nabla \times (\phi \vec{E}) = \nabla \times (\phi_c \vec{E} + \phi \vec{E}_c) = \phi \, \nabla \times \vec{E} + (\nabla \phi) \times \vec{E}$$

$$* \quad \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{E}_c \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}_c) = -\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E})$$

Eigenschaften des Spatproduktes (Seite 9)

$$* \quad \nabla \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \nabla \times (\vec{E}_c \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}_c)$$
$$= \vec{E} \, (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \, (\nabla \cdot \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{E} - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$* \quad \nabla (\vec{E} \cdot \vec{B}) = \nabla (\vec{E}_c \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{B}_c)$$
$$= \vec{E} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{B}$$

Aufgabe 4.2

— o — o —