2.3 Divergenz, Rotation [Lang & Pucker 7.5]

Bausteine: Vektorfelder $[\nabla\phi(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})]$ und Verknüpfungen $[$Skalarprodukt $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, Vektorprodukt $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3]$.

Zur Erinnerung: Nabla ∇ ist ein „Vektoroperator": nimmt ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})\in\mathbb{R}$ und gibt ein Vektorfeld $\nabla\phi(\vec{r})\in\mathbb{R}^3$; $\nabla = \sum_k \vec{e}_k \partial_k = \sum_k \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$; $\nabla\phi(\vec{r}) = \sum_k \frac{\partial\phi}{\partial x_k}\vec{e}_k$ (Kapitel 2.1).

Wir wollen jetzt ∇ auf Vektorfelder operieren lassen, um deren Verhalten zu charakterisieren. Dieses kann mit Hilfe der neuen Verknüpfungen getan werden.

Definition Die Divergenz von $\vec{E}$ ist eine Ableitung $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$\nabla\cdot\vec{E} = \operatorname{div}\vec{E} := \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial E_k}{\partial x_k}.$$

Beispiel: $\vec{E} = z\,\vec{e}_x + xy\,\vec{e}_y + 2\,\vec{e}_z$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(2) = x.$$

Definition Die Rotation von $\vec{E}$ ist eine Ableitung $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\nabla\times\vec{E} = \operatorname{rot}\vec{E} := \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 1\leftrightarrow x \\ 2\leftrightarrow y \\ 3\leftrightarrow z \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\vec{E} = z\,\vec{e}_x + xy\,\vec{e}_y + 2\,\vec{e}_z$

$$\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & xy & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x\Big(\underbrace{\partial_y(2)}_{=0} - \underbrace{\partial_z(xy)}_{=0}\Big) + \vec{e}_y\Big(\underbrace{\partial_z(z)}_{=1} - \underbrace{\partial_x(2)}_{=0}\Big) + \vec{e}_z\Big(\underbrace{\partial_x(xy)}_{=y} - \underbrace{\partial_y(z)}_{=0}\Big)$$

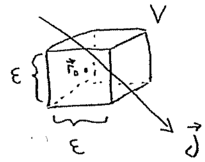
$$= \vec{e}_y + y\,\vec{e}_z.$$

Bemerkung: ∇ wird wie ein normaler Vektor behandelt, außer der Tatsache dass Ableitungen immer von links operieren:

$$\underset{\text{richtig}}{\partial_x f(x)} \neq \underset{\text{falsch}}{f(x)\,\partial_x}.$$

(Alternativ könnte man die Notation verfeinern, z.B. $\vec{\partial}_x f(x) = f(x)\overleftarrow{\partial}_x$.)

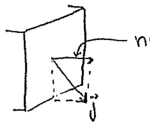
Die anschauliche („physikalische") Bedeutung der Divergenz



Betrachte eine „Strömung" durch ein kleines Volumenelement :

Wieviel „neue Strömung" entsteht innerhalb von V?

* In die x-Richtung : $\underbrace{j_x(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_x)}_{\text{kommt heraus}} - \underbrace{j_x(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_x)}_{\text{geht hinein}}$



nur die Normalkomponente „kommt raus"

* In die y-Richtung: $j_y(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_y) - j_y(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_y)$
* In die z-Richtung: $j_z(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_z) - j_z(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_z)$

Insgesamt (Taylor) : $\varepsilon\,(\partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z) = \varepsilon\, \nabla\cdot\vec{j}$!

Eine Strömung mit der Eigenschaft $\nabla\cdot\vec{j} = 0$ heißt „quellenfrei".

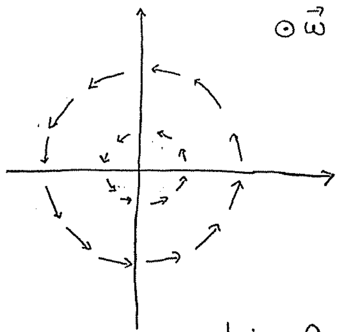
Beispiele:

* $\vec{j} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\nabla\cdot\vec{j} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \partial_x(\omega_y z - y\omega_z) + \partial_y(\omega_z x - z\omega_x) + \partial_z(\omega_x y - x\omega_y)$$

$$= 0$$



„keine Quellen"

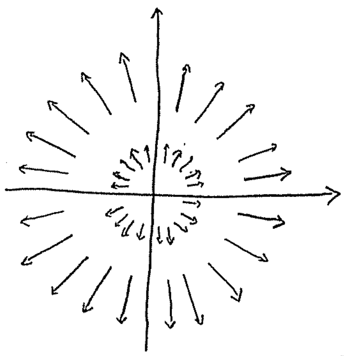
* $\vec{j} = \vec{r}$

$$\nabla\cdot\vec{j} = \nabla\cdot(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

$$= \partial_x(x) + \partial_y(y) + \partial_z(z)$$

$$= 1+1+1$$

$$= 3.$$



„entsteht Strömung"